مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

تقدير دالة البقاء باستخدام توزيع ويبل ثنائي المتغير القائم على دالة الاقتران (IFM) مع التطبيق

صالح حيدر صالح [1]
كلية الادارة والاقتصاد / الجامعة المستنصرية
07726685161
salih.haider97@uomustansiriyah.edu.iq

أ.د جواد كاظم خضير [2]
كلية العلوم الادارية والمالية / جامعة الامام جعفرالصادق(ع)
07704237432
jawad_kadhim@ijsu.edu.iq

مستخلص البحث:
في تحليل دالة البقاء على قيد الحياة ثنائية المتغير، فان تقدير دالــة التوزيع المشتركة وقياس العلاقة والارتباط بين أوقات البقاء يكون ذات أهمية كبيرة ، اذ ان وجود هذا الارتباط وان كان ضعيفاً سوف يؤثر في تقديرات دالة التوزيع ومن ثم يكون العامل المؤثر في دالة البقاء؛ وبناءً عليه تستخدم دوال الاقتران (Copula) بشكل شائع لتقدير التوزيعات متعددة المتغيرات بناءً على الدوال الحدية، وفي هذه البحث تم استخدام دالة الاقتران فارلي - غامبل - مورغنستيرن (FGM) ويهدف البحث الى دراسة خصائص توزيع ويبل ثنائي المتغيرالقائم على دالة الاقتران (FGM) ومن ثم تقدير معلمات هذا التوزيع ، اذ تم عرض طريقتين لتقدير معلمات توزيع ويبل ثنائي المتغير. هي طريقة الأمكان الأعظم (ML) ، طريقة دوال الاستدلال للتوزيعات الحدية (IFM). وقد تم استخدام اسلوب المحاكاة للتحري عن الطريقة الافضل في تقدير معلمات التوزيع ، وقد تبين ان الطريقة الافضل هي طريقة (ML). ومن ثم تم التطبيق على بيانات حقيقية تمثل قياسات الفترة الزمنية بين أول وثاني نوبة بالعدوى عند موضع ادخال القسطرة لدى مرضى الكلى الذين يستخدمون جهاز غسيل الكلى (الديلزة). وتبين ان طريقة تقدير (ML) كانت الطريقة المثلى.

الكلمات المفتاحية: دالة البقاء، توزيع ويبل ثنائي المتغير، دالة الاقتران فارلي - غامبل - مورغنستيرن (FGM) .

ملاحظة : البحث مستل من رسالة ماجستير.

1.المقدمة:

في السنوات الأخيرة، حظيت نماذج البقاء باهتمام العديد من الباحثين، ونوقشت باستفاضة في الأدبيات الإحصائية. وقد تناولت دالة البقاء مجموعة من التوزيعات الاحتمالية احادية المتغير، فقد قدّم مارشال وأولكين (Marshall-Olkin,1997) هيكلاً لنمذجة بيانات البقاء في حالة التوزيعات أحادية المتغير. وفي هذا الهيكل عُرضت هذه التوزيعات من خلال تقليل وتعظيم المتغيرات العشوائية المستمرة المستقلة وتطبيقها على مجموعة من مجالات مراقبة الجودة، والبقاء، والتأمين، ونمذجة وقت الفشل. وكما هو معلوم ، توجد طرائق عدة من المجالات العلمية لنمذجة البقاء على الحياة بما في ذلك الإحصاء والتأمين على الحياة، حيث يُفترض أن ما تبقى من حياة المفردة يكون مستقل. لكن تطبيق هذا الافتراض

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

ليس صحيحًا دائمًا، إذ قد توجد أحيانًا عوامل مشتركة بين حادثتين لمفردة واحدة وبزمنين مختلفين ويتعرضان لنفس عوامل المخاطرة.

ان هيكلة انموذج دالة البقاء لعمر الحياة في حالة وجود متغيرين عشوائيين فانه يكون من الملائم استخدام دالة بقاء مشتركة مترابطة، وهو انموذج شائع الاستخدام بين الباحثين في الآونة الأخيرة. وفي هذا البحث، تناول الباحث توزيع ويبل ثنائي المتغير لكونه توزيعاً مهماً لعمر الافراد في تحليل البقاء . اذ تم استخدام دالة الاقتران فارلي – غامبل – مورغنستيرن (FGM) وتوزيع ويبل الحدي (BW) لانشاء توزيع ثنائي المتغير يسمى توزيع ويبل ثنائي المتغير(FGMBW). ويستخدم هذا التوزيع لوصف البيانات الثنائية التي تتميز بارتباط ضعيف بين المتغيرات في بيانات زمن البقاء للافراد.

2. مشكلة البحث Problem of Research

في التوزيعات ثنائية المتغير المستقلة عموماً تعمل خاصية الاستقلالية على تسهيل عملية تقدير معلمات التوزيع المشترك ؛ فيما تواجه دراسات تحليل بيانات البقاء ثنائية المتغير تحدياً يتمثل في اعتمادية المتغيرين مع بعضهما. وبسبب هذه الاعتمادية تنشأ مشكلة الحصول على تقديرات غير دقيقة لمعلمات دالتي التوزيع والبقاء. وبذلك تبرز الحاجة إلى نماذج إحصائية قادرة على تمثيل هذا الارتباط من خلال ادخال احد اشكال دوال الاقتران في هيكلية التوزيع ثنائي المتغير. وفي هذا السياق، يُعد توزيع ويبل ثنائي المتغيرالقائم على دالة الاقتران من النماذج الواعدة لتحليل بيانات البقاء المترابطة، عن طريق تقدير معلمات دالتي التوزيع ودالة البقاء المشتركة.

3. هدف البحث Aim of Research

يهدف البحث الى استخدام توزيع ويبل ثنائي المتغيرالقائم على دالة الاقتران (FGM) ومن ثم تقدير معلمات هذا التوزيع وتوظيفها في تقدير دالة البقاء، فضلا عن اجراء مقارنة بين طريقتي التقدير (ML) و دوال الاستدلال للتوزيعات الحدية (IFM) باستخدام الجانب التجريبي لبيان الطريقة الافضل ومن ثم التطبيق العملي لبيانات حقيقية من اجل تقدير دالة البقاء لدالة التوزيع المستخدمة.

4. الاستعراض المرجعي Review Of Literature

عام (2017) اقترح الباحثون (Boshnakov et al.) انموذج ويبل ثنائي المتغير للتنبؤ بنتائج كرة القدم ، و يهدف البحث الى تقديم انموذج تنبؤ جديد لتوزيع عدد الاهداف عن طريق عمليات العد التي تعتمد على اوقات الوصول وفقاً لتوزيع ويبل. وتوصل الباحثون الى انموذج جديد ملائم للبيانات مقارنة مع النماذج الاخرى ويؤدي الى عوائد ايجابية للمراهنات.

(Boshnakov,Kharrat, &Mchale, 2017,p. 33)

عام (2018) اقترح (Yuan) طريقة العزوم المعممة لتقدير معلمات توزيع ويبل ثنائي المتغير. حيث تم اشتقاق فترة ثقة لكل مُقدِّر من عزوم التوزيع ثنائي المتغير، وتوصل الباحث باستخدام المحاكاة لحالتين واقعيتين لتوضيح الطريقة المقترحة.**(Yuan, 2018, p. 34)**

عام (2020) ناقش الباحثون (Bai et al.) الاستدلال الاحصائي لنموذج مخاطر المنافسة المعتمدة والمتسارعة لتوزيع مارشال – اولكين ويبل ثنائي المتغيرات بمعاملات غير ثابتة. اذ تم استعمال طريقة

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

الامكان الاعظم والطريقة البيزية ، وتوصلوا الى ان طريقة الامكان الاعظم كانت افضل من طريقة بيزعند حجوم العينات الصغيرة .**(Bai,shi & liu, 2020, p. 1-19)**

وفي (2021) قدم (Ahmed et al.) بحثا تضمن الاعتماد الموضعي لتوزيعات ويبل ثنائية المتغير القائمة على دالة اقتران ارخميدس (Archimedean). وكان الهدف استخدام الاعتماد الموضعي لتحديد توزيع ويبل الثنائي لنماذج الاقتران (Gumbel, Clayton, Independent).

وتم تطبيقه على بيانات دراسة اعتلال الشبكية السكري وتوصلوا الى ان احتمال البقاء (عدم الاصابة بالعمى) اعلى من احتمال بقاء العيون غير المعالجة.

(Ahmed, Fatah & Esa, 2021, p. 816-823)

عام (2022) درس الباحثون (Bhattacharya et al.) توزيع ويبل ثنائي المتغير المعدل الذي يسمح بالفشل اللحظي والمبكر، اذ تم استخدام نموذج الاقتران لبناء هذا التوزيع مع طريقة الامكان الاعظم وخوارزمية التجميع (DBSCAN) لتقدير المعلمات. وتوصلوا الى ان عامل الاقتران (FGM) اعطى نتائج مشجعة مقارنة مع عامل (Clayton) عند تقدير دالة البقاء.

(Bhattacharya, Das & Kunnummal, 2022)

عام (2023) استخدم الباحثون (Fakhry et al.) دالة الاقتران (فارلي -غومبل- مورغنستيرن) (FGM) وتوزيع ويبل الاسي الحدي لانشاء توزيع ويبل الاسي ثنائي المتغير (FGMBEW). وتم تطبيق طريقة (MLE) لتقدير معلمات التوزيع مع اجراء دراسة محاكاة. وتوصلوا من خلال التطبيق ان انموذج (FGMBEW) افضل توفيق مقارنة بنماذج الاخرى.

(Fakhry, Mahdy & Nofal, 2023, p. 408-439)

عام (2024) درس الباحثون (El-Sherpieny et al.) توزيع ويبل ثنائي المتغير القائم على دوال اقتران مختلفة لعينات الرقابة التدريجية من النوع الثاني لتوزيع ويبل الثنائي مع تطبيقات طبية ، و تهدف الدراسة الى تقدير معلمات توزيع ويبل الثنائي المبني على الاقتران بطريقة (ML). وتوصلوا الى ان عامل الاقتران (FGM) قد اعطى نتائج افضل لدالة البقاء مقارنة مع دوال الاقتران الاخرى عند تطبيق طريقة (ML). **(El-Sherieny, Muhammad & Almetwally, 2024, p. 51-85)**

عام (2025) قدم الباحثون (Sindhu et al.) تم استخدام التحويل الانتروبي (Entropy Transformation) لتطوير توزيع ويبل اعتماداً على اقتران (FGM) لبناء توزيع ويبل ثنائي المتغير . وتوصلوا الى افضلية الانموذج وفقا لمعايير AIC,BIC.

.(Sindhu, Atangana, Riaz & Abusshal, 2025, p. 539-608)

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

5. توزيع ويبل ثنائي المتغير:

على فرض ان (T_1) و (T_2) متغيران عشوائيان بدالتي توزيع تراكمية $F_1(t_1)$ و $F_2(t_2)$ على التوالي ويتبعان التوزيع المنتظم المستمر $U(0,1)$. فانه يوجد الرابط (C) بحيث يكون لجميع قيم (t_1) و (t_2) دالة التوزيع المشتركة الاتية **(Flores, 2009, p. 3-6) :**

$$F(t_1,t_2) = C\big(F_1(t_1), F_2(t_2)\big) \quad \dots (1)$$

وان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة تكون على النحو الاتي:

$$f(t_1,t_2) = f_1(t_1)\, f_2(t_2)\, C\big(F_1(t_1), F_2(t_2)\big) \quad \dots (2)$$

6. توزيع ويبل ثنائي المتغير القائم على الاقتران FGM

Bivariate Weibull distribution based on FGM Copula

تعد عائلة (FGM) واحدة من اكثر العائلات المعلمية للاقتران شيوعا التي ناقشها كل من (Farlie,1956) ، (Gumbel,1960) و (Morgenstern,1956) . وان التعبير عن دالة التوزيع للاقتران (FGM) يكون على النحو الاتي **(Farlie, 1956, p. 307-323) (Gumbel, 1960, p. 698-707)**:

$$C(t_1,t_2) = F_1(t_1)F_2(t_2)\big[1+\theta\big(1-F_1(t_1)\big)\big(1-F_2(t_2)\big)\big] \quad \dots (3)$$

وان دالة الكثافة تعطى كما يأتي:

$$c(t_1,t_2) = f_1(t_1)f_2(t_2)\big[1+\theta\big(1-2F_1(t_1)\big)\big(1-F_2(t_2)\big)\big] \quad \dots (4)$$

اذ ان (θ) تمثل معلمة الاعتماد وقيمتها $\theta \in [-1,1]$. وعندما تكون قيمة المعلمة (θ) مساوية للصفر فان اقتران (FGM) يناظر الاستقلالية.

وتأسيساً على ذلك فان دالة التوزيع التراكمية المشتركة لتوزيع ويبل ثنائي المتغير باستخدام عائلة الاقتران (FGM) والتي يرمز لها اختصارا (FGMBW) تكون على النحو الاتي:

$$F(t_1,t_2) = \left(1-e^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\left(1-e^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\right) * \left[1+\theta\left\{1-\left(1-e^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\right\}\left\{1-\left(1-e^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right\}\right] \quad \dots (5)$$

أما دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة فهي:

$$f(t_1,t_2) = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1-1} e^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}} \frac{\alpha_2}{\beta_2}\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2-1} e^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}} * \left[1+\theta\left\{1-2\left(1-e^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\right\}\left\{1-2\left(1-e^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right\}\right] \quad \dots (6)$$

ويرمز للتوزيع اختصارا بالرمز :

$$(T_1,T_2) \sim FGMBW(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\theta)$$

$$t_1>0,\quad t_2>0,\quad \alpha_1>0,\quad \alpha_2>0,\quad \beta_1>0,\quad \beta_2>0,\quad -1\le\theta\le 1$$

$(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2)$: معلمات توزيع ويبل الثنائي. وان θ معلمة التي تشير الى الاعتماد بين T_1,T_2.

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

7. معامل الارتباط لتوزيع ويبل ثنائي المتغير FGMBW

يمكن التعبير عن معامل الارتباط بدلالة الاقتران (C) على النحو الاتي **(Farlie, 1956, p. 307-323)**:

1. معامل ارتباط سبيرمان (Spearman) وصيغته :

$$\rho_{Spearman} = \left(12 \int\int uv[1+\theta(1-u)(1-v)]du\,dv\right) - 3 = \frac{\theta}{3}$$

2. معامل ارتباط كندال (Kendall) وصيغته :

$$\rho_{Kendall} = 1 - 4 \int\int \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \frac{\partial}{\partial v} C(u,v)\, du\, dv = \frac{2}{9}\theta$$

اذ ان :

$$u = F_1(t_1) \text{ و } v = F_2(t_2)$$

8. دالة البقاء Survival Function

$$S(t_j;\alpha_j,\beta_j) = 1 - F(t_j;\alpha_j,\beta_j) = e^{-\left(\frac{t_j}{\beta_j}\right)^{\alpha_j}}; t_j > 0, \alpha_j, \beta_j > 0, \quad j = 1,2$$

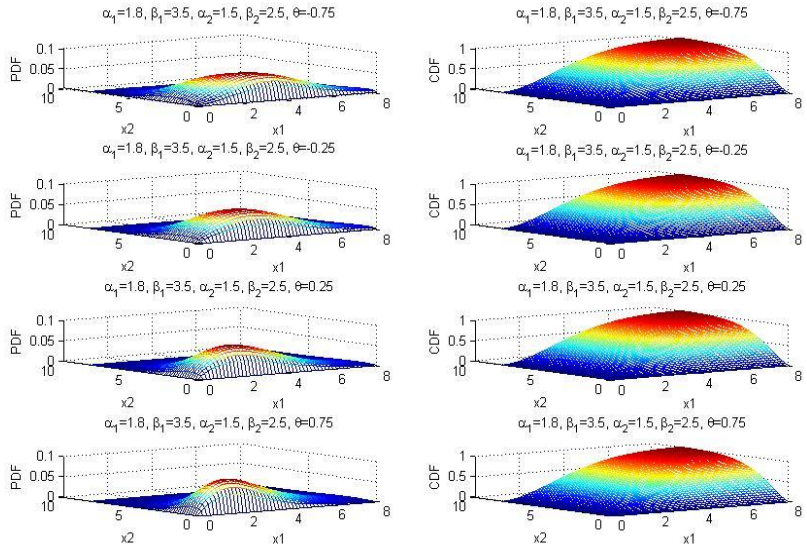
$$S(t_1;\alpha_1,\beta_1) = 1 - F(t_1;\alpha_1,\beta_1) = e^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}; t_1 > 0, \ \alpha_1, \beta_1 > 0$$

$$S(t_2;\alpha_2,\beta_2) = 1 - F(t_2;\alpha_2,\beta_2) = e^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}; t_2 > 0, \ \alpha_2, \beta_2 > 0$$

$$S(t_1,t_2) = C(S(t_1), S(t_2))$$

$$S(t_1,t_2) = e^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}} e^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}} \left[1 + \theta\left(1 - e^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\right)\left(1 - e^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\right)\right] \quad \ldots(7)$$

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376



شكل (1) يوضح دالتي (PDF) و (CDF) لتوزيع (FGMBW) عندما تكون قيم $(\theta = \pm 0.25 , \pm 0.75)$ مع قيم مختلفة للمعلمات $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$

9. طرائق التقدير:

لتقدير دالة البقاء والمؤشرات الخاصة بها باستعمال توزيع ويبل ثنائي المتغيرات، لابد من الحصول على تقدير معلمات الانموذج $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \theta)$ ، وفي هذا البحث سيتم استعمال طريقتين للتقدير:

1.9 طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Estimation MLE

ان مبدأ وهدف هذه الطريقة هو أيجاد قيم تقديرية للمعلمات التي يراد تقديرها وذلك بجعل دالة الأمكان في نهايتها العظمى. وبناء عليه فان دالة لوغارتيم الامكان لتوزيع ويبل ثنائي المتغير (FGMBW) تكون على النحو الاتي **(Yuan, 2018, p. 34)** :

$$lnL = \sum_{j=1}^{n} \left[\ln \left(f_1(t_1) f_2(t_2) c \left(F_1 \left(t_{1j}, \delta_1 \right), F_2 \left(t_{2j}, \delta_2 \right); \theta \right) \right) \right] \quad \dots\dots (8)$$

ويمكن الحصول على تقديرات معلمات التوزيع من خلال تعظيم دالة لوغارتيم الامكان. وعلى فرض ان

$$a(t_1; \alpha_1, \beta_1) = 1 - 2\left(1 - e^{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\right),$$

$$b(t_2; \alpha_2, \beta_2) = 1 - 2\left(1 - e^{-\left(\frac{t_2}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\right),$$

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

فان دالة الامكان للتوزيع (FGMBW) تعرف كما ياتي:

$$L = \left(\frac{\alpha_1\,\alpha_2}{\beta_1\beta_2}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1-1}\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2-1}\right) e^{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}$$

$$* \prod_{i=1}^{n}\left(1+\ \theta\big(a(t_{1i};\alpha_1,\beta_1)\big)\big(b(t_{2i};\alpha_2,\beta_2)\big)\right)$$

وان لوغارتيم دالة الامكان تكتب على النحو الاتي:

$$lnL = n(\ln\alpha_1\ -\ln\beta_1) + n(\ln\alpha_2 - \ln\beta_2) + (\alpha_1\ -1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1} + (\alpha_2-1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\ \theta\big(a(t_{1i};\alpha_1,\beta_1)\big)\big(b(t_{2i};\alpha_2,\beta_2)\big)\right)$$

وان تقدير المعلمات يمكن الحصول عليها من خلال اشتقاق دالة لوغارتيم الامكان بالنسبة الى كل معلمة بشكل منفصل وعلى النحو الاتي:

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_1} = \frac{n}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\ln\frac{t_{1i}}{\beta_1}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{-2\theta\big(b(t_{1i};\alpha_2,\beta_2)\big)e^{-\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}}\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\ln\frac{t_{1i}}{\beta_1}}{\left(1+\ \theta\big(a(t_{1i};\alpha_1,\beta_1)\big)\big(b(t_{2i};\alpha_2,\beta_2)\big)\right)} \qquad \dots\dots(9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha_2} = \frac{n}{\alpha_2} + \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_1}\ln\frac{t_{2i}}{\beta_2}$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{-2\theta\big(b(t_{2i};\alpha_1,\beta_1)\big)e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}}\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\ln\frac{t_{2i}}{\beta_2}}{\left(1+\ \theta\big(a(t_{1i};\alpha_1,\beta_1)\big)\big(b(t_{2i};\alpha_2,\beta_2)\big)\right)} \qquad \dots\dots(10)$$

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = \frac{-n}{\beta_1} - \frac{n(\alpha_1 - 1)}{\beta_1} + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2\alpha_1\, \theta t_{1_i} \left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1 - 1} e^{-\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}} \left(b(t_{2i}; \alpha_2, \beta_2)\right)}{\beta_1^2 \left(1 + \theta\left(a(t_{1i}; \alpha_1, \beta_1)\right)\left(b(t_{2i}; \alpha_2, \beta_2)\right)\right)} \quad \ldots\ldots (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_2} = \frac{-n}{\beta_2} - \frac{n(\alpha_1 - 1)}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{2\alpha_2\, \theta t_{2_i} \left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2 - 1} e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}} \left(b(t_{1i}; \alpha_1, \beta_1)\right)}{\beta_2^2 \left(1 + \theta\left(a(t_{1i}; \alpha_1, \beta_1)\right)\left(b(t_{2i}; \alpha_2, \beta_2)\right)\right)} \quad \ldots\ldots (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(a(t_{1i}; \alpha_1, \beta_1)\right)\left(b(t_{2i}; \alpha_2, \beta_2)\right)}{\left(1 + \theta\left(a(t_{1i}; \alpha_1, \beta_1)\right)\left(b(t_{2i}; \alpha_2, \beta_2)\right)\right)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(2e^{-\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}} - 1\right)\left(2e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}} - 1\right)}{\left[1 + \theta\left(2e^{-\left(\frac{t_{1i}}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}} - 1\right)\left(2e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}} - 1\right)\right]} \quad \ldots\ldots (13)$$

يمكن الحصول على مقدرات الامكان الاعظم $\left(\hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{\theta}\right)$ من خلال حل معادلات الامكان انياً الاتية:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \theta}\right| = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \alpha_j}\right| = 0, \quad \left.\frac{\partial L}{\partial \beta_j}\right| = 0, \qquad j = 1,2$$

ومن ثم حل المعادلات (9) - (13) بعد مساواتها للصفر بالطرائق العددية باستخدام الخوارزمية غير الخطية.

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

2.9 طريقة دوال الاستدلال للتوزيعات الحدية:

Estimation by Inference Functions marginal Distributions (IFM)

تعد هذه الطريقة من طرائق التقدير المعلمية التي يتم فيها التقدير على خطوتين : ففي الخطوة الاولى يتم التقدير لكل توزيع حدي كلاً على حدة باستخدام طريقة الامكان الاعظم وكما يأتي **(Yuan, 2018, p. 34)**

:(Sindhu, Atangana, Riaz & Abusshal, 2025, p. 539-608)

$$Ln\ L_1(\alpha_1,\beta_1;t_{1i}) = \sum_{i=1}^{n} Ln\ f_1\ (t_{1i};\alpha_1,\beta_1)$$

$$Ln\ L_2(\alpha_2,\beta_2;t_{2i}) = \sum_{i=1}^{n} Ln\ f_2\ (t_{2i};\alpha_2,\beta_2) \qquad \dots(14)$$

اما في الخطوة الثانية ، يتم تقدير معلمة الاقتران (θ) من خلال تعظيم دالة لوغاريتم الامكان لدالة كثافة الاقتران للتوزيعين الحديين $F_1(t_{1i}), F_2(t_{2i})$.

وباستخدام دالة الكثافة المشتركة الموضحة في المعادلة (6) ، فان دالة لوغاريتم الامكان للجزء الاول لدالة توزيع ويبل ثنائي الحد تكون على النحو الاتي :

$$\ln L_j(\alpha_j,\beta_j;t_{ji}) = n\left(\ln\alpha_j - \ln\beta_j\right) + (\alpha_j-1)\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right)^{\alpha_j},\ j=1,2 \qquad \dots(15)$$

وبتعظيم دالة الامكان (15) بالنسبة للمعلمة $\{\alpha_j, j=1,2\}$ وكما يأتي:

$$\frac{\partial \ln L_j(\alpha_j,\beta_j;t_{ji})}{\partial\alpha_j} = \frac{n}{\alpha_j} + \sum_{i=1}^{n} ln\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right) ln\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right)$$

$$= \frac{n}{\alpha_j} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}-1\right) ln\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right)$$

وبمساواة المشتقة للصفر يكون:

$$\frac{n}{\alpha_j} - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}-1\right) ln\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right) = 0 \qquad \dots(16)$$

وايضاً تعظيم دالة الامكان (15) بالنسبة للمعلمة $\{\beta_j, j=1,2\}$ وكما يأتي:

$$\frac{\partial \ln L_j(\alpha_j,\beta_j;t_{ji})}{\partial\beta_j} = \frac{-n}{\beta_j} - (\alpha_j-1)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\beta_j}\right) + \frac{\alpha_j}{\beta_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right)^{\alpha_j}$$

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

$$= \frac{-n\alpha_j}{\beta_j} + \frac{\alpha_j}{\beta_j}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right)^{\alpha_j} = \frac{\alpha_j}{\beta_j}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right)^{\alpha_j} - n\right]$$

$$\frac{\alpha_j}{\beta_j}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right)^{\alpha_j} - n\right] = 0 \quad \ldots(17)$$

وبحل المعادلتين (16) و (17) عدديا بتطبيق اسلوب نيوتن – رافسون يتم الحصول على القيم التقديرية للمعلمات $\{\alpha_j, \beta_j;\ j = 1,2\}$. اما الخطوة الثانية تتمثل بتقدير دالة كثافة الاقتران للجزء الثاني لدالة توزيع ويبل ثنائي الحد. ويتم ذلك من خلال تقدير التوزيعات الحدية $\hat{F}_1(t_{1i}), \hat{F}_2(t_{2i})$. التي تم الحصول عليها من تقديرات الخطوة الاولى وكما يأتي:

$$\hat{F}_j(t_{ji}) = 1 - e^{-\left(\frac{t_{ji}}{\beta_j}\right)^{\alpha_j}}, j = 1,2 \quad \ldots(18)$$

وبناءً عليه، يتم تعظيم دالة لوغاريتم الامكان لدالة الاقتران وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة $\{\theta\}$ وكما يأتي:

$$\ln L_C(\alpha_j, \beta_{j,}, \theta; t_{ji}) = \sum_{i=1}^{n} Ln\, C\left[\hat{F}_1(t_{1i}), \hat{F}_2(t_{2i})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} Ln\left[1 + \theta\left\{1 - 2\left(1 - e\left(\frac{t_{1i}}{\hat{\beta}_1}\right)^{\hat{\alpha}_1}\right)\right\}\left\{1 - 2\left(1 - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\hat{\beta}_2}\right)^{\hat{\alpha}_2}}\right)\right\}\right]$$

$$\frac{\partial \ln L_C}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left\{1 - 2\left(1 - e\left(\frac{t_{1i}}{\hat{\beta}_1}\right)^{\hat{\alpha}_1 -}\right)\right\}\left\{1 - 2\left(1 - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\hat{\beta}_2}\right)^{\hat{\alpha}_2}}\right)\right\}}{\left[1 + \theta\left\{1 - 2\left(1 - e\left(\frac{t_{1i}}{\hat{\beta}_1}\right)^{\hat{\alpha}_1 -}\right)\right\}\left\{1 - 2\left(1 - e^{-\left(\frac{t_{2i}}{\hat{\beta}_2}\right)^{\hat{\alpha}_2}}\right)\right\}\right]} = 0 \ldots(19)$$

وبحل المعادلة (19) عدديا بتطبيق اسلوب نيوتن – رافسون يتم الحصول على القيم التقديرية للمعلمة (θ).

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

10. الجانب التجريبي

تم اختيار القيم الافتراضية للمعلمات على مجموعة من الحالات الدراسية لتوزيع (FGMBW)، حيث اختيرت بحجوم عينة مختلفة (30 ، 50 ، 100، 150) وكما موضح في الجدول الاتي:

جدول (1) القيم الافتراضية للمعلمات

n	A				B				C			
	30 , 50 , 100 , 150				30 , 50 , 100 , 150				30 , 50 , 100 , 150			
الحالات الافتراضية	α_1	β_1	α_2	β_2	α_1	β_1	α_2	β_2	α_1	β_1	α_2	β_2
0.3	1.5	20	1	20	2	25	2	25	2.5	30	2.5	30
0.8	1.5	20	1	20	2	25	2	25	2.5	30	2.5	30

وان توليد عينات التوزيع (FGMBW) يتم وفق الخطوات الاتية :

1. توليد متغيرين عشوائيين مستقلين (U) و (V) يتبعان التوزيع المنتظم المستمر $U(0,1)$.
2. وضع $T_1 = \beta_1[-Ln(1-U)]^{\alpha_1}$.
3. وضع $F(T_2 / T_1 = t_1) = V$ لايجاد T_2 عددياً.
4. تكرر الخطوات (3 − 1) بعدد (n) من المرات للحصول على $(t_{1i}, t_{2i}; i = 1, \dots n)$

1.10 تقدير معلمات التوزيع (FGMBW)

تم تقدير معلمات التوزيع (FGMBW) باستخدام الطريقتين الاتيتين :

1. طريقة الامكان الاعظم (ML)
2. طريقة دوال الاستدلال للتوزيعات الحدية (IFM)

بعد ايجاد القيم التقديرية لمعلمات التوزيع (FGMBW) بطريقتي التقدير المذكورة ولجميع الحالات الافتراضية، تم ايجاد قيم المعيارين التحيز (Bias) و متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمعلمات المقدرة كما موضح في الجداول (2) -(4) على التوالي. ومن خلال ذلك يلاحظ ما يأتي:

1. بشكل عام يلاحظ ان قيم المعيارين (Bias) و (MSE) يتناقصان تدريجياً للمقدرات كافة عند زيادة حجم العينة.
2. من الملاحظ من خلال الجداول الثلاث بان هناك تذبذبا في قيم التحيز للمعلمات المقدرة (β_1) و (β_2) وبخاصة عنم حجم العينة (150)
3. عند كل حجوم العينة يلاحظ ان قيم التحيز (Bias) للمعلمات كافة كانت الافضلية لطريقة (MLE) للحالات الثلاث.

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

4. وينطبق التحليل نفسه بالنسبة لقيم متوسط مربعات الخطأ (MSE)، فعند معظم حجوم العينة يلاحظ ان قيم هذا المعيار للمعلمات المقدرة بطريقة (MLE) كانت اقل من قيمها لطريقة (IFM) وبذلك فان الافضلية تكون لطريقة (MLE) للحالات الثلاث.

جدول (2) يوضح مقارنة قيم (Bias) و (MSE) للحالة الافتراضية الاولى وعدد التكرارات (1000)

		$\alpha_1 = 1.5\ ,\beta_1 = 20\ ,\alpha_2 = 1.5\ ,\beta_2 = 20$							
		$\theta = 0.3$				$\theta = 0.8$			
		MLE		IFM		MLE		IFM	
n	Par.	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE
30	α_1	0.081	0.062	0.081	0.064	0.084	0.061	0.097	0.064
	β_1	0.503	5.196	0.512	5.248	0.232	6.018	0.251	6.221
	α_2	0.210	0.107	0.212	0.109	0.094	0.043	0.099	0.045
	β_2	0.779	11.330	0.805	11.838	-0.173	7.222	-0.182	7.266
	θ	0.006	0.270	0.007	0.270	-0.202	0.272	-0.204	0.275
50	α_1	0.034	0.015	0.034	0.014	0.019	0.035	0.022	0.036
	β_1	-0.557	2.832	-0.566	2.725	0.289	2.706	0.289	2.717
	α_2	0.018	0.016	0.018	0.015	-0.012	0.013	-0.023	0.014
	β_2	0.361	3.358	0.369	3.756	-0.057	3.787	-0.078	3.887
	θ	-0.099	0.207	-0.101	0.204	0.030	0.067	0.033	0.067
100	α_1	0.048	0.026	0.051	0.014	0.040	0.014	0.042	0.014
	β_1	-0.074	3.019	-0.086	2.985	-0.005	2.002	-0.005	2.133
	α_2	0.007	0.031	0.013	0.026	0.040	0.019	0.040	0.019
	β_2	-0.211	2.512	-0.216	3.536	-0.044	2.031	-0.049	2.166
	θ	-0.022	0.043	-0.033	0.038	-0.022	0.048	-0.024	0.048
150	α_1	0.000	0.008	-0.001	0.008	0.005	0.012	0.008	0.011
	β_1	0.113	1.708	0.121	1.770	-0.292	1.148	-0.333	1.250
	α_2	0.022	0.012	0.023	0.013	-0.003	0.011	-0.005	0.011
	β_2	0.007	1.432	0.026	1.472	-0.146	1.035	-0.186	1.097
	θ	0.058	0.073	0.059	0.072	0.001	0.030	-0.001	0.030

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

جدول (3) يوضح مقارنة قيم (Bias) و (MSE) للحالة الافتراضية الثانية وعدد التكرارات (1000)

		$\alpha_1 = 2.0$, $\beta_1 = 25$, $\alpha_2 = 2.0$, $\beta_2 = 25$							
		$\theta = 0.3$				$\theta = 0.8$			
		MLE		IFM		MLE		IFM	
n	Par.	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE
30	α_1	0.081	0.159	0.091	0.163	0.241	0.212	0.244	0.211
	β_1	-0.233	6.665	-0.236	6.975	0.096	7.818	0.132	7.927
	α_2	0.107	0.114	0.111	0.110	0.147	0.064	0.147	0.061
	β_2	0.024	8.226	0.118	7.987	0.181	5.261	0.272	5.628
	θ	0.034	0.238	0.035	0.229	0.000	0.073	-0.007	0.077
50	α_1	0.093	0.055	0.097	0.058	0.054	0.074	0.060	0.052
	β_1	0.230	2.789	0.232	2.984	0.169	54.601	-0.185	3.204
	α_2	0.073	0.059	0.076	0.058	0.066	0.093	0.075	0.112
	β_2	-0.061	3.028	-0.059	3.089	2.753	3.011	0.2800	3.008
	θ	0.100	0.210	200.1	0.206	-0.073	0.074	-0.088	0.076
100	α_1	0.001	0.019	0.001	0.017	0.053	0.030	0.050	0.030
	β_1	-0.170	2.142	-0.172	1.021	0.078	1.052	0.072	1.026
	α_2	0.013	0.051	0.016	0.048	0.052	0.037	0.049	0.037
	β_2	1.664	110.744	-0.460	2.736	0.006	2.321	0.008	2.322
	θ	-0.009	0.154	-0.009	0.141	-0.010	0.033	-0.014	0.033
150	α_1	0.062	0.029	0.063	0.029	0.015	0.017	0.008	0.018
	β_1	-0.011	0.668	-0.013	0.686	2.230	4.140	-0.079	0.812
	α_2	0.033	0.021	0.035	0.021	0.046	0.022	-0.015	0.033
	β_2	0.274	1.142	0.285	1.116	1.167	1.150	-0.131	1.482
	θ	0.015	0.068	0.016	0.067	0.039	0.033	0.051	0.034

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

جدول (4) يوضح مقارنة قيم (Bias) و (MSE) للحالة الافتراضية الثالثة وعدد التكرارات (1000)

		$\alpha_1 = 2.5\ ,\beta_1 = 30\ ,\alpha_2 = 2.5\ ,\beta_2 = 30$							
		$\theta = 0.3$				$\theta = 0.8$			
		MLE		IFM		MLE		IFM	
n	Par.	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE	Bias	MSE
30	α_1	0.245	0.180	0.248	0.180	0.171	0.135	0.175	0.140
	β_1	0.254	5.465	0.268	5.495	0.230	6.704	0.259	6.712
	α_2	0.203	0.197	0.209	0.202	0.047	0.212	0.055	0.215
	β_2	0.320	4.163	0.366	4.175	0.451	6.738	0.478	6.778
	θ	-0.024	0.206	-0.026	0.212	-0.195	0.236	-0.199	0.236
50	α_1	0.037	0.072	0.037	0.070	0.116	0.202	0.169	0.208
	β_1	84-0.4	2.862	-0.432	2.683	0.719	1.910	0.052	1.994
	α_2	0.024	0.083	0.020	0.082	0.083	0.136	0.084	0.170
	β_2	0.172	5.231	0.151	5.334	0.261	4.045	-0.163	4.081
	θ	-0.045	0.224	-0.047	0.219	-0.138	0.111	-0.100	0.118
100	α_1	-0.017	0.050	-0.017	0.051	090.0	0.040	0.011	0.040
	β_1	-0.401	2.416	-0.408	2.464	-0.100	0.663	-0.118	0.696
	α_2	0.028	0.038	0.029	0.038	050.0	0.046	0.005	0.047
	β_2	-0.188	1.601	-0.199	1.550	0.214	1.929	0.222	2.033
	θ	-0.047	0.125	-0.048	0.123	-0.092	0.073	-0.095	0.073
150	α_1	0.013	0.027	0.013	0.026	-0.002	0.031	-0.004	0.032
	β_1	0.012	1.487	0.013	1.428	-0.219	0.731	-0.225	0.742
	α_2	0.040	0.030	0.044	0.030	0.010	0.016	0.012	0.016
	β_2	0.332	0.991	0.337	1.009	-0.043	1.164	-0.045	1.544
	θ	-0.024	0.042	-0.025	0.042	-0.041	0.055	-0.043	0.055

11. الجانب التطبيقي

تم الحصول على البيانات الخاصة من مستشفى الكندي التعليمي / مركز غسل الكلى وعددهم (36) مريض؛ البيانات تمثل قياسات الفترة الزمنية بين أول وثاني نوبة بالعدوى عند موضع ادخال القسطرة لدى مرضى الكلى الذين يستخدمون جهاز غسيل الكلى (الديلزة) بعدد (36) مريض ، اذ يمثل (t_1) وقت تسجيل الاصابة بالعدوى في القسطرة الاولى و (t_2) وقت تسجيل الاصابة بالعدوى في القسطرة الثانية .

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

جدول (5) تمثل مشاهدات اوقات تكرار الاصابة بالعدوى عند نقطة ادخال القسطرة

t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2	t_1	t_2
8	16	15	54	22	38	34	30
23	13	17	33	15	8	17	25
22	28	14	8	39	32	30	26
47	31	36	38	40	24	20	23
30	12	42	23	13	36	61	15
24	25	46	25	39	46	20	19
7	9	17	4	12	40	10	74
51	30	37	17	13	10	58	19
53	96	22	14	32	56	2	17

1.11 اختبار البيانات

اولاً: اختبار الارتباط بين المتغيرين (T_1) و(T_2) :

تم ايجاد معامل ارتباط بيرسون (Pearson) و كندال (Kendall) بين مشاهدات المتغيرين (T_1) و(T_2) كما موضح في الجدول الاتي:

جدول (6) معاملات الارتباط بين المتغيرين (T_1) و(T_2)

Method	Correlation	P-value
Pearson	0.1926	0.2603
Kendall	0.1258	0.2870

ولاختبار العلاقة بين المتغيرين المذكورين يتم اعتماد الفرضيتين الاتيتين:

H0: There is *no* correlation in the population ($\rho = 0$).

H1: There *is* a correlation ($\rho \neq 0$).

ومن خلال القيم الاحتمالية (P-value) للطريقتين يتضح ان $(P > \alpha = 0.05)$ وهذا يعني ان الارتباط بين المتغيرين (T_1) و(T_2) غير معنوي احصائياً اي ان الارتباط بينهما كان ضعيفاً .

ثانياً: اختبار التوزيع الاحتمالي للمتغيرين (T_1) و(T_2) :

للتحري عن توزيع المتغيرين (T_1) و(T_2) كلاً على حدة، تم استخدام اختبار كولموغوروف – سمرنوف (Kolmogorov-Smirnov) على وفق صيغة الفرضيتين الاتيتين:

H0: $T_i \sim Weibull(\alpha_i, \beta_i) \quad , i = 1,2.$

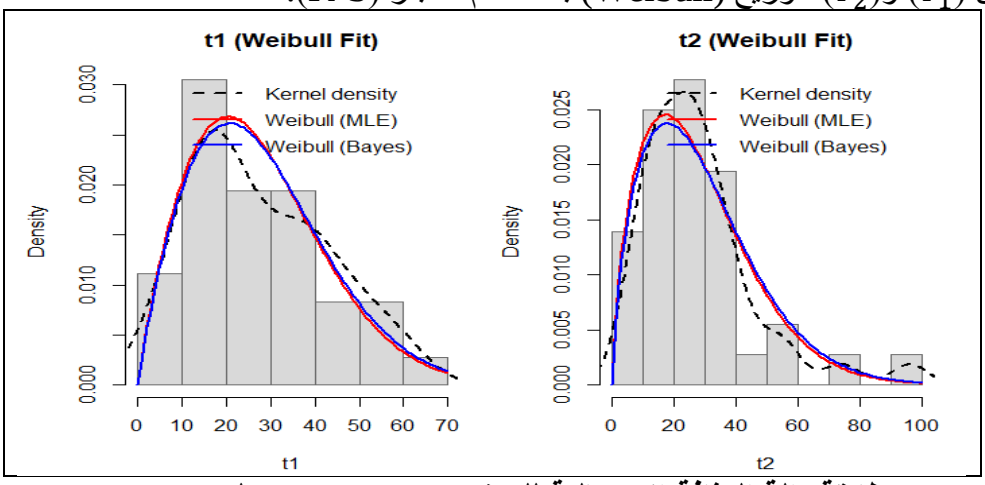
H1: $T_i \nsim Weibull(\alpha_i, \beta_i) \quad , i = 1,2.$

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

جدول (7) نتائج اختبار Kolmogorov-Smirnov للمتغيرين (T_1) و(T_2)

Variable	KS_stat	n	p_value
T_1	0.0922	36	0.9194
T_2	0.0935	36	0.9115

ومن الجدول (7) يلاحظ ان القيم الاحتمالية (P-value) لاختبار Kolmogorov-Smirnov للمتغيرين (T_1) و(T_2) تساوي (0.0922) و (0.0935) على التوالي وكل من القيمتين اكبر من قيمة الاختبار عند مستوى معنوية (0.05) . وبناءً عليه لا ترفض (H0) اي ان المشاهدات للمتغيرين يتبعان توزيع ويبل $(Weibull)$. والشكل التالي يوضح رسم مطابقة دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرين (T_1) و(T_2) لتوزيع (Weibull) باستخدام اختبار (K-S).



شكل (2) رسم مطابقة دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرين (T_1) و(T_2) لتوزيع (Weibull) باستخدام اختبار (K-S).

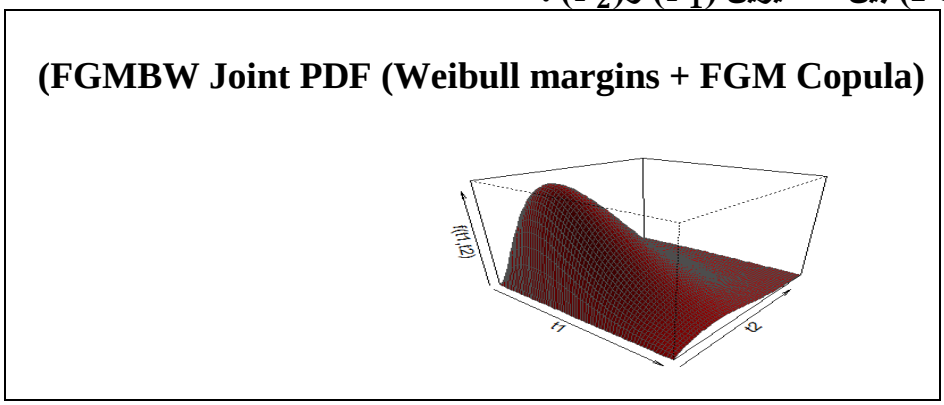
بعد ان تم فحص توزيع المتغيرين (T_1) و(T_2) وتبين ان كلاهما يتبع توزيع ويبل طبقا لاحصاءة (K-S) وان العلاقة بينهما تتصف باعتمادية ضعيفة على وفق معاملي ارتباط (Pearson) و (Kendall)، يلي ذلك تقدير معلمات التوزيع (FGMBW). واعتماداً على ما جاء في الجانب التجريبي فان نتائج التقدير كانت تشير الى تفوق نسبي لطريقة (MLE) في العينات الصغيرة والكبيرة. والجدول التالي يبين نتائج التقدير لطريقة (ML) وعلى النحو الاتي:

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

جدول (8) تقديرات معلمات التوزيع FGMBW بطريقة (ML)

			MLE	
Parameters	Estimators	Bias	MSE	RMSE
$\widehat{\alpha}_1$	1.86662	-0.13338	0.01779	0.13338
$\widehat{\beta}_1$	31.39393	1.39393	1.94303	1.39393
$\widehat{\alpha}_2$	1.61819	-0.38181	0.14578	0.38181
$\widehat{\beta}_2$	32.18024	2.18024	4.75346	2.18024
$\widehat{\theta}$	0.43560	0.13560	0.01839	0.13560

والشكل (3) يبين رسم دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة المقدرة لتوزيع ويبل ثنائي المتغير (FGMBW) بين المتغيرين (T_1) و(T_2) .



شكل (3) رسم دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة المقدرة لتوزيع ويبل ثنائي المتغير (FGMBW)

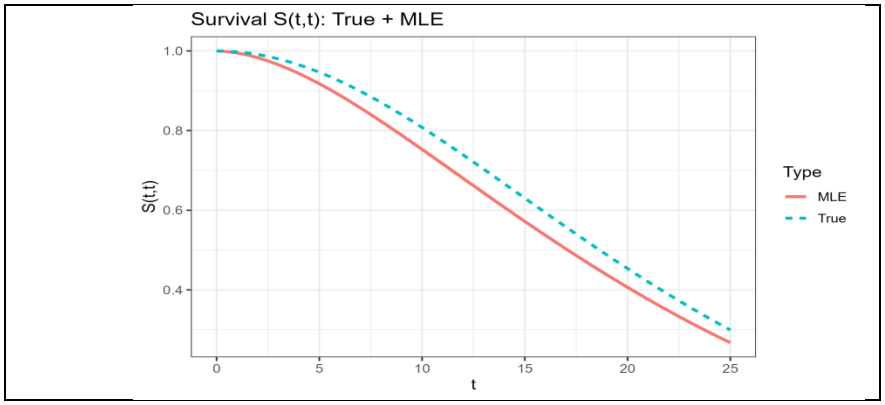
12. تقدير قيم دالة البقاء التوزيع FGMBW

تم حساب قيم دالة البقاء عند فترات زمنية مختلفة عند تطبيق طريقة (MLE). فضلاً عن حساب القيم الحقيقية لتلك الدالة. والجدول (9) يوضح قيم دالة البقاء المقدرة من خلال طريقة التقدير.

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

جدول (9) يوضح قيم دالة البقاء المقدرة من خلال طريقتي (ML) و (Bayes) مع القيم الحقيقية

	t	S_TRUE	S_MLE		t	S_TRUE	S_MLE
1	0.5	0.9994	0.9983	11	5.5	0.9353	0.9045
2	1	0.9978	0.9944	12	6	0.9235	0.8903
3	1.5	0.9950	0.9889	13	6.5	0.9110	0.8755
4	2	0.9912	0.9820	14	7	0.8976	0.8602
5	2.5	0.9862	0.9739	15	7.5	0.8835	0.8444
6	3	0.9802	0.9646	16	8	0.8687	0.8283
7	3.5	0.9732	0.9543	17	8.5	0.8532	0.8118
8	4	0.9652	0.9431	18	9	0.8371	0.7950
9	4.5	0.9561	0.9310	19	9.5	0.8205	0.7781
10	5	0.9462	0.9181	20	10	0.8034	0.7609



شكل (5) رسم دالة تابقاء المقدرة لتوزيع ويبل ثنائي المتغير (FGMBW)

13. الاستنتاجات

1. تفوق طريقة (MLE) في عملية تقدير توزيع ويبل ثنائي المتغير (FGMBW) من خلال نتائج الجانب التجريبي.
2. اظهر الجانب التطبيقي ان هناك اعتمادية ضعيفة بين قياسات الفترة الزمنية بين أول وثاني نوبة بالعدوى حيث كان معامل ارتباط كندال مساويا الى (0.096) بعد تقدير الانموذج بطريقة (MLE).

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

3. ان قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقدرين ($\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$) في الجانب التطبيقي كانت عالية نوعما ، وهذا جاء متناغما مع نتائج الحانب التجريبي.

14. التوصيات:

1. نوصي باستخدام الطرائق اللامعلمية لتقديرمعلمات التوزيع (FGMBW) ومقارنتها مع الطرائق التي ذكرت في البحث.
2. دراسة توزيع ويبل ثنائي المتغير باستخدام دوال اقتران (Copula Function) اخرى في تقدير معلماته ، على سبيل المثال (Frank Copula) او (Clayton Copula) وغيرها.
3. نوصي بدراسة تقدير دالتي البقاء و المخاطرة باستخدام توزيع ويبل ثنائي المتغير المبتور لامراض الجهاز التنفسي.

المصادر:

1. Ahmed, S. O., Fatah, K. S., & Esa, S. (2021). "Local dependence for bivariate Weibull distributions created by Archimedean copula." ***Baghdad Science Journal***, 18(1 Suppl.), 816–823.
2. Bai, X., Shi, Y., Ng, H. K. T., & Liu, Y. (2020). " Inference of accelerated dependent competing risks model for Marshall–Olkin bivariate Weibull distribution with nonconstant parameters.", ***Journal of Computational and Applied Mathematics,*** 366, pp 1-19.
3. Bhattacharya, S., Das, I., & Kunnummal, M. (2022). "Modified bivariate Weibull distribution allowing instantaneous and early failures". ***Journal of LaTeX Templates***.
4. Boshnakov, G., Kharrat, T., & McHale, I. G. (2017). "A bivariate Weibull count model for forecasting association football scores." ***International Journal of Forecasting***, 33(2), 458–466.
5. El-Sherpieny, E.-S. A., Muhammad, H. Z., & Almetwally, E. M. (2024). "Progressive Type-II censored samples for bivariate Weibull distribution with economic and medical applications." ***Annals of Data Science***, 11(1), 51–85.
6. Fakhry.A., Mahdy,M. & Nofal,Z.M.(2023). "Farlie-Gumbel-Morgenstern Bivariate Exponentaited Weibull Distribution with Applications" ***Trade and Finance Journal,Tanta,eygpt***,No.3, vol.2. pp 408-439.
7. Farlie, D.G.J.(1956)."The performance of some correlation coeficients for a general Bivariate distribution,".Biometricka, 47,pp 307-323.

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

8. Flores, A.Q. (2009). "Testing copula function as a method to derive bivariate Weibull distributions." ***American Political Science Associatio*** (APSA), 3–6.
9. Gumbel EJ (1960) "Bivariate exponential distributions." J Am Stat Assoc 55:698–707.
10.Sindhu,T.M.,Atangana,A.,Riaz,M.B.&Abushal.T. (2025)."Bivariate entropy-transformed Weibull distribution for modelling bivariate system - simulated data from a computer series: ***Mathematical features and applied results.", Alexandria Engineering Journal*** 117 (2025) 593–608.
11.. Yuan, F.(2018)."Parameter estimation for bivariate Weibull distribution using generalized moment method for reliability evaluation". Quality and Reliability Engineering Inte... Vol. 34, Iss.

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية

P- ISSN: 3007-3650 E- ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education Vol.32 (No.137) 2026,pp.356-376

Estimating the survival function using the bivariate Weibull distribution based on the coupling function (IFM) with application

Saleh Haider Saleh [1]
Administration & Economics College Al-Mustansiriyah Univercity
salih.haider97@uomustansiriyah.edu.iq

Pro.Dr.Jawad kadhim Khudhair[2]
Administrative &Financial Sciences College Imam Jaafar Al-Sadiq Univercity
jawad_kadhim@ijsu.edu.iq

Abstract:

In analyzing a bivariate survival function, estimating the joint distribution function and measuring the relationship and correlation between survival times is of great importance, since the existence of this correlation, even if weak, will affect the estimates of the distribution function and thus be the influencing factor in the survival function. Therefore, coupling functions are commonly used to estimate multivariable distributions based on marginal. The research aims to study the characteristics of the bivariate Weibull distribution based on the function (FGM), and to estimate the parameters of this distribution.

Two methods for estimating the parameters of bivariate Weibull distribution were also presented. These are the Maximum likelihood (ML) method and the Inference Functions for Marginal Distributions (IFM) method

The Simulation method was used to investigate the best method for estimating the distribution parameters. It was found that the best method is the (ML) method. The study was then applied to real data representing the times to the first and second recurrences of infection at the catheter insertion point in kidney patients undergoing dialysis.

Keyword: survival function, bivariate Weibull distribution, Farley-Gamble-Morgan coupling function.

Note: The research is based on a master's thesis.