

استعمال المحاكاة لمقارنة بعض طرائق تقدير دالة البقاء

لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور ب

احمد شمخي صاحب ، امينه كريم عيسى

أ قسم الإحصاء كلية الإدارة والاقتصاد، الجامعة المستنصرية
ب قسم الإحصاء كلية الإدارة والاقتصاد، الجامعة المستنصرية

07713418380

مستخلص البحث:

يستخدم توزيع لوماكس المعكوس المبتور بوصفه أحد التوزيعات ذات الذيل الثقيلة في تمثيل البيانات الموجبة المقيدة، لما يوفره من مرونة في تطبيقات تحليل البقاء والموثوقية. يهدف هذا البحث إلى دراسة سلوك هذا التوزيع والتركيز على تقدير دالة البقاء المرتبطة به. اعتمدت الدراسة على أسلوبين إحصائيين للتقدير، هما طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى الموزونة، مع إجراء تجربة محاكاة لعدة أحجام من العينات بلغت (50، 100، 150)، وذلك لغرض تقييم أداء كل طريقة باستخدام معياري متوسط مربعات الخطأ ومتوسط الخطأ المطلق. أظهرت النتائج أن طريقة الإمكان الأعظم تحقق دقة أعلى مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الموزونة، ويزداد هذا التفوق مع زيادة حجم العينة، في حين قدمت الطريقة الأخرى نتائج مقبولة لكنها أقل كفاءة نسبياً. وتشير هذه النتائج إلى أن كفاءة أسلوب التقدير تتأثر بحجم العينة وطبيعة البيانات، الأمر الذي يستدعي اختيار الطريقة الملائمة وفقاً لظروف التطبيق كلمات مفتاحية: توزيع لوماكس المعكوس المبتور، دالة البقاء، الإمكان الأعظم.

1-المقدمة (Introduction)

تعد دراسات تحليل البقاء من الركائز المهمة في الإحصاء التطبيقي، نظراً لتعدد استخداماتها في تحليل الأزمنة حتى وقوع الأحداث لدى الأفراد أو الأنظمة. فضلاً عن تطبيقاتها الواسعة في مجالات الاعتمادية وتحليل الفترات الزمنية،^[11] (Collett, 2003) وتعتمد هذه الدراسات على دالة البقاء التي تمثل احتمال استمرار الفرد أو النظام دون وقوع الحدث المدروس ابتداءً من نقطة زمنية معينة، تركز هذه الدراسة على توزيع لوماكس المعكوس المبتور، وهو امتداد لتوزيع لوماكس التقليدي المعروف بقدرته على تمثيل البيانات الموجبة ذات الانحراف، ويُعد حالة خاصة من توزيع باريتو من النوع الثاني. ويتميز هذا التوزيع بمرونته في النمذجة الإحصائية، مما يجعله مناسباً في العديد من تطبيقات تحليل البقاء والموثوقية^[8] (Kumar et al., 2017)، وبسبب الأهمية التطبيقية لهذا التوزيع، اهتم الباحثون بدراسة أساليب تقدير معالمه باستخدام طرائق مختلفة. من بينها الإحصاءات المرتبة والعزوم. إضافة إلى إجراء مقارنات بين طرق التقدير من حيث الكفاءة والدقة. كما أن ظاهرة البتر في البيانات تؤثر بشكل مباشر في خصائص التوزيع مثل المتوسط والتباين، الأمر الذي يستوجب اختيار أساليب تقدير تأخذ طبيعة البيانات بنظر الاعتبار^[15] (Yadav et al., 2019)، يهدف هذا البحث إلى تقدير دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور باستخدام طريقتي الإمكان الأعظم (MLE) والمربعات الصغرى الموزونة (WLSE). وذلك بالاعتماد على تجارب المحاكاة. مع تقييم أداء الطريقتين باستخدام

معياري متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE) ، لتحديد الطريقة الأكثر كفاءة تحت تأثير اختلاف أحجام العينات.^[14] (Sinha & Kale, 1986)

الجانب النظري – The Theoretical Aspect

2-دالة البقاء – Survival Function

تعد دالة البقاء دالة احتمالية غير متزايدة، ويشابه مفهومها الرياضي مفهوم دالة المعولية. من الخصائص المهمة في تحليل البقاء هو التعامل مع البيانات غير المكتملة نتيجة الرقابة (Censoring) أو البتر (Truncation). ويمكن الفرق بينهما في أن الرقابة تحدث عادةً بشكل غير مقصود بسبب نقص المعلومات المتوفرة عن الحدث، بينما البتر يحدث عمدًا عند اختيار العينات ضمن نطاق محدد. وتمثل دالة البقاء احتمال استمرار الكائن أو الفرد على قيد الحياة بعد زمن معين t ، ويرمز لها عادة بالرمز $S(t)$ ، ويمكن التعبير عنها رياضياً كالتالي:

$$S(t) = p_r(T > t) = \int_t^{t_{\max}} f(t) dt \quad \dots (1)$$

$$S(t) = \Pr(T > t) \quad \dots (2)$$

حيث ان:

t : يمثل زمن البقاء، ويكون دائماً أكبر من أو يساوي صفر ($t \geq 0$).

$S(t)$: تمثل داله البقاء

T : متغير عشوائي يشير إلى وقت البقاء حتى وقوع الحدث (مثل الوفاة)

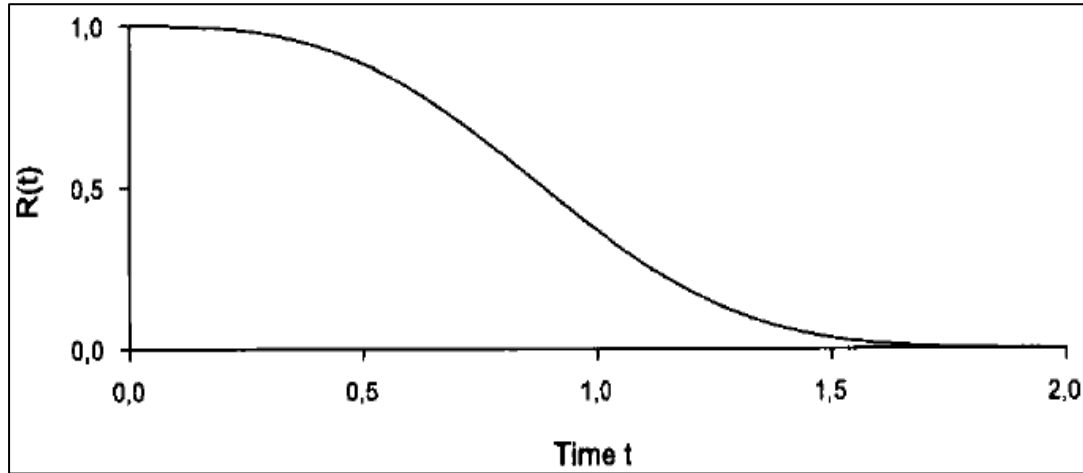
وتعتبر دالة البقاء متممة لدالة التوزيع التراكمية (Cumulative Distribution Function)، ولنفترض أن دالة التوزيع التراكمية هي $F(t)$ ، فإنه يمكن التعبير عن دالة البقاء بالعلاقة التالية

$$F(t) = \Pr(T \leq t) \quad \dots (3)$$

وان

$$S(t) = 1 - \Pr(T \leq t) \quad \dots (4)$$

$$S(t) = 1 - F(t) \quad \dots (5)$$



الشكل (1) – منحنى دالة البقاء

يمثل منحنى دالة البقاء العلاقة بين الزمن T واحتمالية استمرار الكائن أو الفرد على قيد الحياة. في هذا المنحنى، يشير المحور الأفقي إلى الزمن، بينما يشير المحور الرأسي إلى قيم دالة البقاء $S(t)$. يوضح الشكل العلاقة العكسية بين دالة البقاء والزمن، إذ تقل قيمة $S(t)$ تدريجياً مع مرور الوقت كما أن دالة البقاء تكون موجبة، مستمرة، ومتناقصة لجميع قيم x ضمن الفترة $(0, t)$ ، وتظل قيمتها دائماً بين الصفر والواحد [14]
 $S(\infty) = 0 \quad S(0) = 1$ (Sinha & Kale, 1986)

3-توزيع لوماكس المعكوس المبتور (TILD)

يعد توزيع لوماكس المعكوس (Inverse Lomax Distribution – ILD) من التوزيعات الاحتمالية المهمة في تحليل بيانات البقاء ودراسة الموثوقية، حيث يتميز بكونه ثقيل الذيل (Heavy-Tailed Distribution)، ما يجعله مناسباً لوصف الظواهر التي تشمل فترات حياة طويلة. عند تطبيق البتر (Truncation) على هذا التوزيع، نحصل على توزيع لوماكس المعكوس المبتور (Truncated Inverse Lomax Distribution – TILD)، وهو نسخة معدلة من توزيع لوماكس المعكوس، حيث يتم تقييد نطاق القيم ضمن حدود محددة $[a, b]$ ، ويصبح هذا التوزيع مفيداً بشكل خاص في الحالات التي تكون فيها البيانات ضمن نطاق محدد، كما هو الحال في دراسات البقاء وتحليل الموثوقية. إذا كان x متغيراً عشوائياً مستمراً يتبع توزيع لوماكس المعكوس (ILD)، فإن دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) ودالة التوزيع التراكمية (CDF) يمكن تمثيلها بالشكل التالي على التوالي:

$$f_t(x, \alpha, \beta \mid a < x \leq b) = \frac{f_t(x, \alpha, \beta)}{F(b) - F(a)} \quad \dots (6)$$

$$a \leq x \leq b \quad a, b \in \mathcal{R}^+$$

$$F_t(x, \alpha, \beta \mid a < x \leq b) = \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)} \quad \dots (7)$$

$$a \leq x \leq b \quad a, b \in \mathcal{R}^+$$

حيث:

α : يمثل معامل الشكل (Shape Parameter)

β : يمثل معامل المقياس (Scale Parameter)

a, b : تمثل حدود البتر (Truncation Limits)

في هذه الحالة، عند تطبيق البتر على التوزيع بحيث تكون القيم محصورة ضمن الفترة $a \leq x \leq b$ فإن دالة الكثافة الاحتمالية (PDF) لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور (DTILD) تأخذ الشكل التالي:

$$f_{dt}(x) = \frac{\frac{\alpha\beta}{x^2} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{-(1+\beta)}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\beta} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\beta}}, \quad a \leq x \leq b \quad \dots (8)$$

f_{dt} : إذ دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور (DTILD) على النطاق المحدد $[a, b]$.

كما تمثل دالة التوزيع التراكمية (CDF) لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور (DTILD) الاحتمال التراكمي لبقاء المتغير العشوائي ضمن القيم المقصورة بين a و b Bantan et al., (2020) [3]

$$F_{dt}(x) = \frac{\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} \quad a \leq x \leq b \quad \dots (9)$$

F_{dt} : تمثل دالة التوزيع التراكمية لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور من الجهتين (Doubly Truncated - DT)، ويشير الرمز dt إلى أن التوزيع خضع لعملية البتر من الطرفين. ويُعرف هذا التوزيع باسم توزيع لوماكس المعكوس المبتور من الجهتين (DTILD)، حيث يتم تقييد الدراسة على الفترة المحددة بين الحدين B و a (Yadav et al., 2019) [15]

4-دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور (DTILD)

تعرف دالة البقاء (Survival Function) بأنها الاحتمال المرتبط ببقاء وحدة معينة على قيد الحياة بعد فترة زمنية محدد t ، أي أنها تمثل احتمال عدم وقوع الحدث محل الدراسة حتى الزمن t ويمكن التعبير عن دالة البقاء رياضياً بالشكل التالي:

$$S_{dt}(t) = \frac{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{t}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} \quad a \leq t \leq b \quad \dots (10)$$

حيث:

$S_{dt}(t)$: حيث تمثل دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور من الجهتين (DTILD) (Lee & Wang, 2003)^[10]

5-طرائق التقدير Estimation Methods

1-5 طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Estimation – MLE)

تعرف طريقة الإمكان الأعظم (MLE) بأنها التقنية التي تحدد قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان عند أقصى قيمة لها، أي أنها تمثل المعلمات التي تحقق أعلى احتمال لحدوث البيانات الملاحظة. وتعتمد هذه الطريقة على تعظيم دالة الإمكان (Likelihood Function) للحصول على تقديرات دقيقة لمعلمات التوزيع، ويتم ذلك من خلال الخطوات التالية:

- بناء دالة الإمكان اعتماداً على العينة المسحوبة من التوزيع.
- أخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان (log-likelihood function).
- حل المعادلات الناتجة باستخدام طرق عددية مثل طريقة نيوتن-رافسون.

إذا كانت العينة العشوائية $x_1, x_2, \dots, x_n$ مستقلة ومتطابقة التوزيع (iid) مأخوذة من توزيع لوماكس المعكوس المبتور (TILD)، فإن دالة الإمكان تأخذ الصيغة التالية:

$$L(x, \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\frac{\alpha\beta}{x^2} \left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-(1+\alpha)}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} \right] \quad \dots (11)$$

في أسلوب الإمكان الأعظم يُؤخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان بهدف تبسيط العمليات الرياضية، حيث تتحول عملية الضرب إلى جمع مما يسهل إجراء الاشتقاق وإيجاد مقدرات المعلمات. وتُعرف الدالة الناتجة بدالة لوغاريتم الإمكان (Log-Likelihood Function).

$\log L(x, \alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} &= n \log \alpha + n \log \beta - 2 \sum_{i=1}^n \log x_i - (1 + \alpha) \\ &\quad - \log \left[\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right] \quad \dots (12) \end{aligned}$$

للحصول على القيم المثلى للمعلمتين α و β ، يتم اشتقاق دالة لوغاريتم الإمكان الأعظم بالنسبة لكل معلمة على حدة، ثم تُساوى المشتقات بالصفر للحصول على معادلات التقدير. وفيما يلي اشتقاق دالة لوغاريتم الإمكان بالنسبة للمعلمة α [8] (Kumar et al., 2017)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n \log \left(1 + \frac{\beta}{x_i} \right) + \frac{n}{\left[\left(1 + \frac{\beta}{a} \right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{b} \right)^{-\alpha} \right]} \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{\beta}{a} \right)^{-\alpha} \log \left(1 + \frac{\beta}{a} \right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{b} \right)^{-\alpha} \log \left(1 + \frac{\beta}{a} \right)^{-\alpha} \right] \\ &= 0 \quad \dots (13) \end{aligned}$$

اشتقاق دالة لوغاريتم الإمكان الطبيعي بالنسبة للمعلمة β [9] (Kumphon & Gupta, 2011)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \alpha)}{x_i + \beta} \\ &\quad + \frac{n\alpha \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\beta}{a} \right)^{-(\alpha+1)} - \frac{1}{b} \left(1 + \frac{\beta}{b} \right)^{-(\alpha+1)} \right]}{\left(1 + \frac{\beta}{a} \right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{b} \right)^{-\alpha}} \quad (14) \end{aligned}$$

2-5. المربعات الصغرى الموزونة (Weighted Least Squares Method – WLSE)

تُعد طريقة المربعات الصغرى الموزونة من الأساليب الإحصائية المهمة في تقدير المعلمات، وقد طرحت من قبل الباحثين Wilson و Swain و Venkatraman عام (1988)، كما تُعرف أحياناً بأسلوب الانحدار (Regression Procedure). استُخدمت هذه الطريقة في تقدير معلمات توزيع بيتا، ويمكن تطبيقها كذلك على توزيعات احتمالية أخرى. وتتميز هذه الطريقة عن المربعات الصغرى الاعتيادية بإدخال عامل الوزن W_i ، إذ تعتمد على مبدأ تقليل مجموع مربعات الأخطاء الموزونة إلى أدنى قيمة ممكنة، ويتم التقدير من خلال تصغير الدالة الآتية:

$$W(x_i, \alpha, \beta, a, b) = \sum_{i=1}^n W_i [F(x_i; n \setminus \alpha, \beta) - E[F(x_i; n \setminus \alpha, \beta)]]^2. \quad (15)$$

حيث:

$$W_i = \frac{1}{V[F(x_i; n \setminus \alpha, \beta)]}$$

تمثل W_i الأوزان المعتمدة في طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLSE)، حيث تُستخدم للحد من تأثير المشاهدات ذات التباين المرتفع. وبما أن تباين دالة التوزيع التراكمي يختلف باختلاف القيم، فإن اعتماد أوزان تتناسب عكسياً مع التباين يساهم في الحصول على تقديرات أكثر دقة وكفاءة [2] (Al-Nasser, 2009)

$W(x_i, \alpha, \beta, a, b)$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} - \frac{i}{n+1} \right]^2 \dots (16)$$

$$(x, \alpha, \beta, a, b) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} - \frac{i}{n+1} \right]^2 \dots (17)$$

لإيجاد التقديرات المثلى للمعلمتين a و β ، يتم اشتقاق دالة المربعات الصغرى الموزونة بالنسبة لكل معلمة، ثم تُحل المعادلات غير الخطية الناتجة باستخدام أساليب عددية مناسبة، مثل طريقة نيوتن-رافسون.

$\frac{dW(x_i, \alpha, \beta, a, b)}{d\alpha}$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} - \frac{i}{n+1} \right] \right] P_\alpha = 0 \quad (18)$$

$$\frac{dW(x_i, \alpha, \beta, a, b)}{d\beta}$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \left[\frac{(n+1)^2(n+2)}{i(n-i+1)} \left[\frac{\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha}} - \left(\frac{i}{n+1}\right) \right] \right] P_{\beta} = 0 \dots (19)$$

حيث إن P_{α} يساوي

$$P_{\alpha} = \frac{\left(\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right)}{\left[\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right]^2}$$

$$\frac{\left[- \left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right)^{-\alpha} \log \left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \log \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right] - K}{\left[\left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right]^2} \dots (20)$$

حيث إن K يساوي

$$K = \left[\left(1 + \frac{\beta}{x_i}\right)^{-\alpha} - \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right] \left[- \left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} \log \left(1 + \frac{\beta}{b}\right)^{-\alpha} + \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \log \left(1 + \frac{\beta}{a}\right)^{-\alpha} \right] \dots (21)$$

يتم الحصول على مقدرات المربعات الصغرى الموزونة (WLSE) من خلال حل المعادلتين الناتجتين. وبسبب الطابع غير الخطي لهذه المعادلات، لا يمكن حلها تحليلياً، لذا يُستخدم أسلوب عددي مثل طريقة نيوتن-رافسون (Newton-Raphson Method) [5]. (El-Damrawy, 2024)

5-3 طريقة نيوتن-رافسن في التقدير

تُعد الخوارزمية التكرارية (Newton Raphson)، التي قدمها العالمان إسحاق نيوتن وجوزيف رافسون، في عام (1960)، من أكثر الطرائق التكرارية انتشاراً . وتستعمل للحصول على أفضل تقريب للأصفار أو الجذور لدالة القيم الحقيقية. بمعنى إنها تستعمل لحل المعادلات الخطية وكذلك لإيجاد حل للمعادلات اللاخطية التي يكون من الصعب حلها بالطرائق الرياضية الاعتيادية، تم استخدام طريقة (نيوتن-رافسن) كأحد الأساليب العددية لإيجاد مقدرات الإمكان الأعظم . وذلك في الحالات التي يتعذر فيها الحصول على حلول تحليلية لمعادلات التقدير، وتعتمد هذه الطريقة على تحديث القيم التقديرية للمعلمات بصوره تكرارية باستخدام المشتقات الأولى والثانية لدالة اللوغاريتم الاحتمالي لحين الوصول إلى حالة الاستقرار، ولتنفيذ هذه الطريقة، تم اتباع الخطوات الآتية:

1. تحديد دالة اللوغاريتم الاحتمالي الخاصة بالتوزيع قيد الدراسة،
2. اشتقاق المشتقة الأولى بالنسبة للمعلمة للحصول على معادلة التقدير،
3. اشتقاق المشتقة الثانية لدالة اللوغاريتم الاحتمالي،
4. اختيار قيمة ابتدائية مناسبة للمعلمة .
5. حساب تقديرات معلمات التوزيع .
6. نستمر في عمليه التكرار، وفي كل تكرار يتم احتساب الفرق المطلق، بين قيمة المعلمة المقدرة الجديدة وقيمة المعلمة المقدرة السابقة. إذا كان الفرق المطلق صغير جداً، (حسب شرط التوقف) تتوقف الخوارزمية ونحصل على افضل مقدر "للمعلمة .
7. اعتماد القيمة النهائية كمقدر للمعلمة،

6-مقاييس المقارنة (Comparison Scales)

بعد الحصول على المقدرات في المرحلة الثالثة، يتم مقارنة طرق التقدير المختلفة باستخدام معايير محددة لاختيار الطريقة الأكثر كفاءة. ومن أبرز هذه المعايير متوسط مربعات الخطأ (MSE)، والذي يُحسب وفق الصيغة التالية:

$$MSE(S(t)) = \frac{1}{R} * \sum_{i=1}^R (S(t_i) - \hat{S}(t_i))^2 \dots (20)$$

7-متوسط الخطأ المطلق (MAE)

هو مقياس إحصائي يُستخدم لتقييم دقة التقديرات، ويعبر عن متوسط القيم المطلقة للفروق بين التقديرات والمعلمات الحقيقية، بحيث يتم حساب المتوسط لهذه الانحرافات لتقدير دقة الطريقة المستخدمة.

$$MAE = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^n |\theta_i - \hat{\theta}_i| \dots (21)$$

8-المحاكاة (Simulation)

تُعرف المحاكاة بأنها عملية تقليد أو تمثيل تقريبي لنظام حقيقي من دون التعامل مع النظام ذاته، حيث يتم تمثيل الظاهرة الواقعية باستخدام مجموعة من المعادلات الحسابية والرياضية داخل برامج الحاسوب المتقدمة. وتتيح المحاكاة دراسة وتقييم سلوك النظام على مدى فترة زمنية محددة من خلال تنفيذ تجارب رقمية تعتمد على العمليات الرياضية والمنطقية لوصف هيكلية النظام ووظائفه.

مراحل تجارب المحاكاة (Stages of Simulation Experiments) المرحلة الاولى:

أ. تحديد القيم الافتراضية (Initial Values Determination) تُعد هذه المرحلة من أهم مراحل تجارب المحاكاة، إذ تعتمد عليها جميع المراحل اللاحقة. تم اختيار القيم الافتراضية تجريبياً من خلال إجراء عدة تجارب واختيار القيم التي استقرت عندها التقديرات وأنتجت أفضل النتائج. ولأغراض الدراسة، تم استخدام ثلاثة أحجام مختلفة من العينات وهي $n=50, 100, 150$
1- تم تحديد أوقات البقاء لتقدير دالتي البقاء والخطر عند القيم $t=1, 2, \dots, 4$
2- تم تكرار التجربة $r=500$ مرة بهدف تعزيز دقة النتائج وتحقيق التجانس المطلوب في التقديرات.

ب- تحديد قيم المعلمات الافتراضية (Values Determination of Parameters) تم اختيار قيم افتراضية لكل من معلمة الشكل ومعلمة القياس لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور، كما هو موضح في الجدول (1) أدناه:

جدول (1): القيم الافتراضية للمعلمات α و β لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور

Model	α	β
1	0.5	1
2	1	3
3	3	5

المرحلة الثانية: توليد البيانات (Data Generation)

تم إنشاء بيانات عشوائية تتبع توزيع لوماكس المعكوس المبتور باستخدام الطريقة العكسية لدالة التوزيع التراكمي (Inverse Transform Method)، وذلك ضمن الفترة المقطوعة المحددة $[a=0.7, b=5]$ ، كما يلي:

1- تم إنشاء أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة $(0,1)$.

$$U_i \sim U(0,1) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

U_i : يمثل متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم يتم توليده باستعمال برنامج R على وفق الصيغة الآتية:

$$U = [0 \leq p \leq 1], \quad p \sim \text{UniformDistribution}$$

2- يتم في هذه المرحلة تحويل القيم العشوائية المولدة $i=1, \dots, n$ في الخطوة الأولى، والتي تتبع التوزيع المنتظم المستمر على الفترة $(0,1)$ ، إلى قيم عشوائية تتبع توزيع لوماكس المعكوس المبتور. ويتم ذلك بالاعتماد على أسلوب التحويل المعكوس، والذي يقوم على استخدام معكوس دالة التوزيع التراكمي للتوزيع المستهدف. حيث إن دالة التوزيع التراكمي لأي توزيع احتمالي، والمشار إليها بالرمز $F(x)$ ، يمكن توظيفها في توليد مشاهدات عشوائية من ذلك التوزيع من خلال تطبيق معكوسها. وبعبارة أخرى، إذا كانت U متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع المنتظم على الفترة $(0,1)$ ، فإن القيم العشوائية X التابعة للتوزيع المطلوب يمكن الحصول عليها عبر العلاقة $x = F^{-1}U$

بما أن الدراسة تركز على توزيع لوماكس المعكوس المبتور ضمن الفترة المحددة $[a=0.7, b=5]$ ، فقد تم توليد القيم العشوائية بالاعتماد على معكوس دالة التوزيع التراكمي الخاصة بالتوزيع بعد تطبيق البتر، كما يلي

$$x_i = \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{1-u(1-F(b))-F(a)}{\alpha} \right)^{\frac{-1}{\alpha}} \right]^{-1} \dots (22)$$

9- تحليل نتائج تجربة المحاكاة (Analysis of Simulation Result)

تم تقديم نتائج تقدير المعلمات لكل من طريقتي التقدير، مع تحليل بيانات المحاكاة بهدف تحديد الأسلوب الأكثر كفاءة في التقدير، وذلك بالاعتماد على المعيارين الإحصائيين متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE) لإجراء المقارنة بين الطريقتين.

1. عند حجم العينة (50):

جدول (2): نتائج أساليب تقدير توزيع لوماكس المعكوس المبتور باستخدام طريقتي التقدير (MLE, WLSE) عند حجم عينة (50).

α	β		MLE	WLSE	best
0.5	11.	$\hat{\alpha}$	0.35252	0.460619	lse
		MSE (α)	0.8021	0.9174	
		MAE (α)	0.97201	0.7486	
		$\hat{\beta}$	0.926624	0.789695	lse
		MSE (β)	0.89583	0.9135	
		MAE (β)	0.92404	0.737	
0.5	3	$\hat{\alpha}$	0.371921	0.665522	wlse
		MSE (α)	0.95693	0.7409	
		MAE (α)	1.00217	0.8229	
		$\hat{\beta}$	2.954406	2.855947	wlse
		MSE (β)	0.80223	0.6814	
		MAE (β)	0.92846	0.9057	
0.5	5	$\hat{\alpha}$	0.567262	0.305912	

		MSE (α)	1.08238	1.0502	lse
		MAE (α)	0.98904	0.9681	
		$\hat{\beta}$	5.114134	4.942158	lse
		MSE(β)	0.83577	0.9276	
		MAE(β)	0.96018	0.7589	
		$\hat{\alpha}$	1.199416	0.921599	
11.	11.	MSE (α)	0.88881	0.7334	wlse
		MAE (α)	1.0049	0.9314	
		$\hat{\beta}$	1.15403	0.823607	lse
		MSE(β)	0.82628	0.5985	
		MAE(β)	1.05183	0.9166	
		$\hat{\alpha}$	0.944136	0.974952	
11.	3	MSE (α)	0.8398	0.9307	lse
		MAE (α)	1.14764	1.1652	
		$\hat{\beta}$	2.866086	3.083917	wlse
		MSE(β)	0.78091	0.5665	
		MAE(β)	1.14972	1.2115	
		$\hat{\alpha}$	1.048928	1.148785	
11.	5	MSE (α)	0.93977	1.053	lse
		MAE (α)	1.12372	1.0956	
		$\hat{\beta}$	5.016559	4.893322	mle
		MSE(β)	0.87503	0.9655	
		MAE(β)	0.92729	0.9131	
		$\hat{\alpha}$	2.954903	3.059652	
3	11.	MSE (α)	0.82329	0.6718	lse
		MAE (α)	1.1648	0.85	
		$\hat{\beta}$	1.167431	1.411925	wlse
		MSE(β)	0.91195	6540.6	
		MAE(β)	1.03597	0.8904	
		$\hat{\alpha}$	2.862811	2.893268	
3	3	MSE (α)	0.96512	0.7496	lse
		MAE (α)	0.95849	0.8566	
		$\hat{\beta}$	2.967285	2.995366	lse
		MSE(β)	0.85956	0.8418	
		MAE(β)	1.00048	0.8565	
		$\hat{\alpha}$	2.933975	2.998772	
3	5	$\hat{\alpha}$	2.933975	2.998772	

		MSE (α)	0.92443	0.943	lse
		MAE (α)	1.12229	1.095	
		$\hat{\beta}$	5.182555	5.007643	wlse
		MSE(β)	1.12619	0.9943	
		MAE(β)	0.9425	1.007	

تشير النتائج عند حجم العينة (50)، إلى عدم وجود تفوق ثابت لإحدى طريقتي التقدير عبر جميع القيم. إذ تتغير الأفضلية بين MLE و WLSE ، بحسب قيم المعلمات، كما تظهر قيم (MSE و MAE) تذبذباً نسبياً في دقة التقدير. مما يعكس تأثير المقدرات بحجم العينة الصغير وعدم استقرارها بشكل كامل في هذه المرحلة

2. عند حجم العينة: (100)

الجدول (3): نتائج أساليب تقدير توزيع لوماكس المعكوس المبتور باستخدام طريقتي التقدير (MLE, WLSE) عند حجم عينة (100) :

α	β		MLE	WLSE	best
0.5	1.1	$\hat{\alpha}$	0.481355	0.448033	MLE
		MSE (α)	0.4309	0.7745	
		MAE (α)	0.5657	1.2631	
		$\hat{\beta}$	1.096475	1.023979	MLE
		MSE(β)	0.4275	0.8272	
		MAE(β)	0.5001	1.2514	
0.5	3	$\hat{\alpha}$	0.522849	0.310723	MLE
		MSE (α)	0.4398	0.8039	
		MAE (α)	0.4917	0.9888	
		$\hat{\beta}$	3.069161	3.106677	MLE
		MSE(β)	0.5124	1.181	
		MAE(β)	0.4024	0.9851	
0.5	5	$\hat{\alpha}$	0.438285	0.578384	MLE
		MSE (α)	0.5797	1.0888	
		MAE (α)	0.5016	1.0194	
		$\hat{\beta}$	5.045585	4.87247	MLE
		MSE(β)	0.4695	1.2595	
		MAE(β)	0.5889	1.3666	
1.1	1.1	$\hat{\alpha}$	1.108426	1.24869	MLE
		MSE (α)	0.4068	1.0265	
		MAE (α)	0.4529	1.1573	
		$\hat{\beta}$	1.121813	1.357839	MLE

1.1	3	MSE(β)	0.4197	1.2088	MLE
		MAE(β)	0.4011	1.1234	
		$\hat{\alpha}$	1.016863	1.351962	
		MSE(α)	0.4506	0.8218	
		MAE(α)	0.4274	0.8685	
		$\hat{\beta}$	2.969339	3.241699	
	5	MSE(β)	0.4811	0.8071	MLE
		MAE(β)	0.4353	0.8568	
		$\hat{\alpha}$	1.117026	0.871511	
		MSE(α)	0.4106	1.1148	
		MAE(α)	0.5142	1.1048	
		$\hat{\beta}$	5.102739	4.985126	
3	1.1	MSE(β)	0.5079	1.0463	MLE
		MAE(β)	0.5909	1.0081	
		$\hat{\alpha}$	3.000526	2.996336	
		MSE(α)	0.4552	1.0371	
		MAE(α)	0.4957	1.0938	
		$\hat{\beta}$	1.066947	0.734102	
3	3	MSE(β)	0.4245	1.1484	MLE
		MAE(β)	0.5421	1.2342	
		$\hat{\alpha}$	2.9813	2.750598	
		MSE(α)	0.4727	1.0648	
		MAE(α)	0.5144	0.9595	
		$\hat{\beta}$	2.959853	2.758696	
3	5	MSE(β)	0.583	0.943	MLE
		MAE(β)	0.5908	1.2989	
		$\hat{\alpha}$	2.996388	3.080857	
		MSE(α)	0.4639	1.1422	
		MAE(α)	0.5649	1.3583	
		$\hat{\beta}$	5.067301	4.876278	
		MSE(β)	0.5919	1.04	MLE
		MAE(β)	0.5255	1.3195	

عند حجم العينة (100)، نلاحظ أن طريقة الإمكان الأعظم، (MLE) تحقق أفضل أداء بشكل عام مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الموزونة، (WLSE) من حيث انخفاض قيم MSE و MAE لمعظم حالات المعلمات، وأن زيادة حجم العينة مقارنة بالحجم الأصغر يؤدي إلى تحسين

واضح في دقة التقدير واستقرار المقدرات. حيث أصبحت الفروقات بين القيم المقدرة والقيم الحقيقية أقل، مما يعكس ازدياد كفاءة طرق التقدير مع زيادة حجم العينة،

3. عند حجم العينة: (150)

جدول (4): نتائج أساليب تقدير توزيع لوماكس المعكوس المبتور باستخدام طريقتي التقدير (MLE, WLSE) عند حجم عينة (150).

α	β		MLE	WLSE	best
0.5	1.1	$\hat{\alpha}$	0.490699	0.34759	MLE
		MSE (α)	0.5521	1.2742	
		MAE (α)	0.4354	0.9192	
		$\hat{\beta}$	1.002085	1.031908	MLE
		MSE(β)	0.4248	0.7826	
		MAE(β)	0.4273	1.1692	
0.5	3	$\hat{\alpha}$	0.532522	0.377526	MLE
		MSE (α)	0.4223	0.7473	
		MAE (α)	0.4181	0.7359	
		$\hat{\beta}$	2.947096	3.163742	MLE
		MSE(β)	0.4905	0.9283	
		MAE(β)	0.5119	1.0719	
0.5	5	$\hat{\alpha}$	0.500018	0.372352	MLE
		MSE (α)	0.4862	0.9511	
		MAE (α)	0.5811	1.081	
		$\hat{\beta}$	4.936724	5.012919	MLE
		MSE(β)	0.4467	1.0809	
		MAE(β)	0.5036	0.8726	
1.1	1.1	$\hat{\alpha}$	1.020276	1.193772	MLE
		MSE (α)	0.4176	1.1223	
		MAE (α)	0.451	1.0068	
		$\hat{\beta}$	1.191971	0.994318	MLE
		MSE(β)	0.4001	1.161	
		MAE(β)	0.4011	0.9473	
1.1	3	$\hat{\alpha}$	1.173615	1.135523	MLE
		MSE (α)	0.5044	1.1485	
		MAE (α)	0.4049	1.131	
		$\hat{\beta}$	3.035838	2.893829	MLE
		MSE(β)	0.4377	1.1192	
		MAE(β)	0.4736	1.1689	

1.1	5	$\hat{\alpha}$	1.074511	1.100916	MLE
		MSE (α)	0.4885	0.8614	
		MAE (α)	0.5543	0.9851	
		$\hat{\beta}$	5.020593	4.858772	MLE
		MSE(β)	0.4139	1.1217	
		MAE(β)	0.5074	1.0883	
3	1.1	$\hat{\alpha}$	2.938211	3.231712	MLE
		MSE (α)	0.5377	1.0677	
		MAE (α)	0.4263	1.0237	
		$\hat{\beta}$	1.051619	1.088215	MLE
		MSE(β)	0.5368	1.0707	
		MAE(β)	0.5881	1.3568	
3	3	$\hat{\alpha}$	2.974108	2.92873	MLE
		MSE (α)	0.5806	1.3706	
		MAE (α)	0.4613	0.8958	
		$\hat{\beta}$	3.025045	2.862746	MLE
		MSE(β)	0.4387	0.7615	
		MAE(β)	0.528	0.9013	
3	5	$\hat{\alpha}$	3.037248	2.90955	MLE
		MSE (α)	0.5306	1.0588	
		MAE (α)	0.5031	0.9805	
		$\hat{\beta}$	5.035374	4.930818	MLE
		MSE(β)	0.5619	1.1156	
		MAE(β)	0.4737	1.0288	

10- نتائج تقديرات دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور

1- عند حجم العينة (50):

جدول (5): تقديرات دالة البقاء لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور عند حجم عينة (50) .

α	β	t	real	MLE	WLSE	real	MLE	WLSE
0.5	1.1	0.5	1.2293	1.2606	1.2620	1.1097	1.2616	1.2643
	1.1	1	0.7641	0.7450	0.7433	0.8395	0.9078	0.9152
	1.1	1.5	0.5175	0.4916	0.4888	0.7347	0.7745	0.7803
	1.1	2	0.3625	0.3388	0.3361	0.6976	0.7238	0.7282
	1.1	2.5	0.2556	0.2363	0.2340	0.7071	0.7257	0.7291
	1.1	3	0.1773	0.1626	0.1607	0.7656	0.7796	0.7822
	1.1	3.5	0.1174	0.1070	0.1057	0.9008	0.9117	0.9138
	3	0.5	1.1603	1.1781	1.1430	0.7852	0.8755	0.6956
	3	1	0.8171	0.8042	0.8299	0.6453	0.6894	0.6029
	3	1.5	0.5996	0.5799	0.6191	0.6017	0.6294	0.5760
	3	2	0.4446	0.4251	0.4639	0.6000	0.6194	0.5825
	3	2.5	0.3272	0.3103	0.3440	0.6320	0.6465	0.6193
	3	3	0.2347	0.2211	0.2481	0.7060	0.7173	0.6963
	3	3.5	0.1596	0.1496	0.1695	0.8523	0.8613	0.8446
	5	0.5	1.1372	1.1280	1.1643	0.6758	0.6287	0.8146
	5	1	0.8379	0.8455	0.8171	0.5692	0.5436	0.6396
	5	1.5	0.6357	0.6481	0.6026	0.5433	0.5260	0.5890
	5	2	0.4839	0.4970	0.4499	0.5531	0.5403	0.5860
	5	2.5	0.3638	0.3758	0.3334	0.5933	0.5833	0.6185
	5	3	0.2656	0.2756	0.2407	0.6733	0.6653	0.6934
	5	3.5	0.1834	0.1910	0.1647	0.8243	0.8176	0.8407
1.1	1.1	0.5	1.1682	1.1553	1.2118	0.8009	0.7362	1.0140
	1.1	1	0.8036	0.8133	0.7727	0.7049	0.6716	0.8135
	1.1	1.5	0.5726	0.5871	0.5277	0.6580	0.6374	0.7245
	1.1	2	0.4137	0.4278	0.3709	0.6478	0.6338	0.6929
	1.1	2.5	0.2979	0.3099	0.2620	0.6720	0.6619	0.7046
	1.1	3	0.2098	0.2192	0.1819	0.7396	0.7319	0.7643
	1.1	3.5	0.1405	0.1473	0.1205	0.8807	0.8747	0.9000
	3	0.5	1.0976	1.1139	1.1072	0.4632	0.5459	0.5129
	3	1	0.8682	0.8536	0.8599	0.4742	0.5235	0.5015

	3	1.5	0.6825	0.6574	0.6685	0.4905	0.5246	0.5083
	3	2	0.5304	0.5035	0.5157	0.5207	0.5459	0.5333
	3	2.5	0.4041	0.3793	0.3907	0.5721	0.5917	0.5816
	3	3	0.2976	0.2769	0.2866	0.6590	0.6747	0.6663
	3	3.5	0.2067	0.1910	0.1984	0.8143	0.8272	0.8201
	5	0.5	1.0764	1.0804	1.0734	0.3622	0.3825	0.3465
	5	1	0.8917	0.8878	0.8946	0.3903	0.4032	0.3810
	5	1.5	0.7282	0.7212	0.7334	0.4207	0.4299	0.4144
	5	2	0.5844	0.5764	0.5902	0.4618	0.4688	0.4572
	5	2.5	0.4575	0.4498	0.4629	0.5219	0.5274	0.5184
	5	3	0.3449	0.3383	0.3495	0.6156	0.6201	0.6129
	5	3.5	0.2445	0.2393	0.2481	0.7765	0.7802	0.7743
3	1.1	0.5	1.0575	1.0551	1.0406	0.2420	0.2312	0.1655
	1.1	1	0.9000	0.9034	0.9226	0.3833	0.3711	0.3031
	1.1	1.5	0.7292	0.7360	0.7754	0.4530	0.4427	0.3870
	1.1	2	0.5736	0.5817	0.6283	0.5065	0.4983	0.4539
	1.1	2.5	0.4387	0.4466	0.4920	0.5690	0.5624	0.5268
	1.1	3	0.3231	0.3299	0.3693	0.6612	0.6558	0.6270
	1.1	3.5	0.2241	0.2293	0.2601	0.8191	0.8147	0.7908
	3	0.5	1.0162	1.0189	1.0181	0.0622	0.0738	0.0705
	3	1	0.9627	0.9583	0.9596	0.1538	0.1697	0.1650
	3	1.5	0.8725	0.8617	0.8649	0.2384	0.2539	0.2493
	3	2	0.7589	0.7440	0.7484	0.3198	0.3336	0.3294
	3	2.5	0.6329	0.6164	0.6213	0.4092	0.4213	0.4175
	3	3	0.5019	0.4861	0.4909	0.5246	0.5351	0.5318
	3	3.5	0.3708	0.3574	0.3614	0.7017	0.7108	0.7079
	5	0.5	1.0089	1.0093	1.0089	0.0330	0.0347	0.0330
	5	1	0.9774	0.9768	0.9775	0.0962	0.0984	0.0961
	5	1.5	0.9152	0.9137	0.9153	0.1677	0.1697	0.1677
	5	2	0.8256	0.8236	0.8257	0.2458	0.2472	0.2457
	5	2.5	0.7143	0.7121	0.7144	0.3368	0.3378	0.3367
	5	3	0.5868	0.5848	0.5869	0.4561	0.4566	0.4560
	5	3.5	0.4481	0.4465	0.4482	0.6379	0.6381	0.6378

2. بالنسبة لحجم العينة: (100)
جدول (6): تقديرات دوال البقاء والخطر لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور عند حجم عينة. (100)

α	β	t	real	MLE	WLSE	real	MLE	WLSE
0.5	1.1	0.5	1.2293	1.2317	1.2412	1.1097	1.1217	1.1676
	1.1	1	0.7641	0.7627	0.7566	0.8395	0.8446	0.8663
	1.1	1.5	0.5175	0.5155	0.5071	0.7347	0.7376	0.7506
	1.1	2	0.3625	0.3607	0.3530	0.6976	0.6995	0.7082
	1.1	2.5	0.2556	0.2542	0.2478	0.7071	0.7084	0.7146
	1.1	3	0.1773	0.1762	0.1713	0.7656	0.7666	0.7713
	1.1	3.5	0.1174	0.1166	0.1131	0.9008	0.9016	0.9053
	3	0.5	1.1603	1.1562	1.1841	0.7852	0.7647	0.9071
	3	1	0.8171	0.8203	0.8003	0.6453	0.6342	0.7021
	3	1.5	0.5996	0.6046	0.5744	0.6017	0.5943	0.6363
	3	2	0.4446	0.4498	0.4199	0.6000	0.5946	0.6236
	3	2.5	0.3272	0.3318	0.3059	0.6320	0.6279	0.6493
	3	3	0.2347	0.2384	0.2178	0.7060	0.7027	0.7193
	3	3.5	0.1596	0.1624	0.1473	0.8523	0.8495	0.8628
	5	0.5	1.1372	1.1449	1.1285	0.6758	0.7156	0.6305
	5	1	0.8379	0.8319	0.8448	0.5692	0.5894	0.5463
	5	1.5	0.6357	0.6260	0.6468	0.5433	0.5563	0.5287
	5	2	0.4839	0.4739	0.4953	0.5531	0.5624	0.5428
	5	2.5	0.3638	0.3549	0.3741	0.5933	0.6003	0.5855
	5	3	0.2656	0.2583	0.2741	0.6733	0.6789	0.6673
	5	3.5	0.1834	0.1779	0.1898	0.8243	0.8289	0.8194
1.1	1.1	0.5	1.1682	1.1557	1.1372	0.8009	0.7388	0.6484
	1.1	1	0.8036	0.8131	0.8284	0.7049	0.6721	0.6188
	1.1	1.5	0.5726	0.5869	0.6110	0.6580	0.6374	0.6022
	1.1	2	0.4137	0.4277	0.4519	0.6478	0.6336	0.6086
	1.1	2.5	0.2979	0.3098	0.3309	0.6720	0.6617	0.6430
	1.1	3	0.2098	0.2192	0.2360	0.7396	0.7317	0.7172
	1.1	3.5	0.1405	0.1473	0.1597	0.8807	0.8745	0.8629
	3	0.5	1.0976	1.1053	1.0749	0.4632	0.5027	0.3480
	3	1	0.8682	0.8613	0.8905	0.4742	0.4975	0.3991



P-ISSN: 3007-3650 E-ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
Vol.32 (No.138) 2026, pp.450-474

	3	1.5	0.6825	0.6705	0.7226	0.4905	0.5065	0.4365
	3	2	0.5304	0.5175	0.5750	0.5207	0.5324	0.4795
	3	2.5	0.4041	0.3922	0.4461	0.5721	0.5812	0.5396
	3	3	0.2976	0.2877	0.3334	0.6590	0.6662	0.6325
	3	3.5	0.2067	0.1992	0.2344	0.8143	0.8202	0.7923
	5	0.5	1.0764	1.0744	1.0962	0.3622	0.3522	0.4641
	5	1	0.8917	0.8938	0.8728	0.3903	0.3832	0.4529
	5	1.5	0.7282	0.7323	0.6944	0.4207	0.4151	0.4650
	5	2	0.5844	0.5891	0.5466	0.4618	0.4572	0.4955
	5	2.5	0.4575	0.4621	0.4215	0.5219	0.5181	0.5486
	5	3	0.3449	0.3490	0.3140	0.6156	0.6124	0.6374
	5	3.5	0.2445	0.2478	0.2204	0.7765	0.7737	0.7947
3	1.1	0.5	1.0575	1.0596	1.0912	0.2420	0.2517	0.3987
	1.1	1	0.9000	0.8974	0.8618	0.3833	0.3927	0.5173
	1.1	1.5	0.7292	0.7240	0.6589	0.4530	0.4604	0.5523
	1.1	2	0.5736	0.5677	0.4965	0.5065	0.5123	0.5807
	1.1	2.5	0.4387	0.4331	0.3676	0.5690	0.5735	0.6258
	1.1	3	0.3231	0.3183	0.2640	0.6612	0.6649	0.7060
	1.1	3.5	0.2241	0.2204	0.1794	0.8191	0.8221	0.8552
	3	0.5	1.0162	1.0168	1.0230	0.0622	0.0647	0.0917
	3	1	0.9627	0.9617	0.9516	0.1538	0.1577	0.1942
	3	1.5	0.8725	0.8698	0.8451	0.2384	0.2425	0.2783
	3	2	0.7589	0.7551	0.7212	0.3198	0.3236	0.3558
	3	2.5	0.6329	0.6285	0.5913	0.4092	0.4127	0.4410
	3	3	0.5019	0.4976	0.4621	0.5246	0.5277	0.5523
	3	3.5	0.3708	0.3671	0.3370	0.7017	0.7045	0.7260
	5	0.5	1.0089	1.0088	1.0083	0.0330	0.0326	0.0304
	5	1	0.9774	0.9776	0.9786	0.0962	0.0953	0.0921
	5	1.5	0.9152	0.9159	0.9182	0.1677	0.1666	0.1635
	5	2	0.8256	0.8268	0.8300	0.2458	0.2444	0.2419
	5	2.5	0.7143	0.7157	0.7193	0.3368	0.3354	0.3335
	5	3	0.5868	0.5884	0.5919	0.4561	0.4547	0.4532
	5	3.5	0.4481	0.4497	0.4526	0.6379	0.6365	0.6354

3. بالنسبة لحجم العينة: (150)
جدول (7): تقديرات دوال البقاء والخطر لتوزيع لوماكس المعكوس المبتور عند حجم عينة: (150)

α	β	t	real	MLE	WLSE	real	MLE	WLSE
0.5	1.1	0.5	1.2293	1.2381	1.2525	1.1097	1.1516	1.2239
	1.1	1	0.7641	0.7583	0.7502	0.8395	0.8608	0.8885
	1.1	1.5	0.5175	0.5092	0.4987	0.7347	0.7478	0.7626
	1.1	2	0.3625	0.3548	0.3455	0.6976	0.7066	0.7158
	1.1	2.5	0.2556	0.2492	0.2418	0.7071	0.7136	0.7199
	1.1	3	0.1773	0.1724	0.1668	0.7656	0.7706	0.7752
	1.1	3.5	0.1174	0.1139	0.1100	0.9008	0.9047	0.9082
	3	0.5	1.1603	1.1571	1.1737	0.7852	0.7687	0.8550
	3	1	0.8171	0.8193	0.8077	0.6453	0.6380	0.6767
	3	1.5	0.5996	0.6029	0.5856	0.6017	0.5975	0.6202
	3	2	0.4446	0.4478	0.4310	0.6000	0.5973	0.6123
	3	2.5	0.3272	0.3300	0.3155	0.6320	0.6301	0.6409
	3	3	0.2347	0.2369	0.2254	0.7060	0.7046	0.7127
	3	3.5	0.1596	0.1612	0.1529	0.8523	0.8512	0.8575
	5	0.5	1.1372	1.1377	1.1542	0.6758	0.6781	0.7632
	5	1	0.8379	0.8375	0.8247	0.5692	0.5708	0.6136
	5	1.5	0.6357	0.6349	0.6146	0.5433	0.5446	0.5721
	5	2	0.4839	0.4830	0.4622	0.5531	0.5541	0.5738
	5	2.5	0.3638	0.3629	0.3443	0.5933	0.5942	0.6091
	5	3	0.2656	0.2649	0.2496	0.6733	0.6741	0.6859
	5	3.5	0.1834	0.1828	0.1714	0.8243	0.8250	0.8346
1.1	1.1	0.5	1.1682	1.1593	1.1694	0.8009	0.7575	0.8041
	1.1	1	0.8036	0.8107	0.8020	0.7049	0.6800	0.7120
	1.1	1.5	0.5726	0.5834	0.5695	0.6580	0.6418	0.6639
	1.1	2	0.4137	0.4244	0.4104	0.6478	0.6364	0.6525
	1.1	2.5	0.2979	0.3071	0.2949	0.6720	0.6636	0.6758
	1.1	3	0.2098	0.2171	0.2073	0.7396	0.7331	0.7426
	1.1	3.5	0.1405	0.1458	0.1386	0.8807	0.8756	0.8832
	3	0.5	1.0976	1.0910	1.0965	0.4632	0.4296	0.4568
	3	1	0.8682	0.8744	0.8690	0.4742	0.4536	0.4722



P-ISSN: 3007-3650 E-ISSN: 2706-8536
Journal of the College of Basic Education

مجلة كلية التربية الاساسية
كلية التربية الاساسية – الجامعة المستنصرية
Vol.32 (No.138) 2026, pp.450-474

	3	1.5	0.6825	0.6932	0.6835	0.4905	0.4762	0.4900
	3	2	0.5304	0.5421	0.5312	0.5207	0.5100	0.5207
	3	2.5	0.4041	0.4149	0.4046	0.5721	0.5638	0.5725
	3	3	0.2976	0.3067	0.2980	0.6590	0.6523	0.6594
	3	3.5	0.2067	0.2137	0.2069	0.8143	0.8088	0.8148
	5	0.5	1.0764	1.0783	1.0773	0.3622	0.3718	0.3664
	5	1	0.8917	0.8898	0.8906	0.3903	0.3964	0.3941
	5	1.5	0.7282	0.7249	0.7261	0.4207	0.4250	0.4240
	5	2	0.5844	0.5807	0.5818	0.4618	0.4650	0.4647
	5	2.5	0.4575	0.4539	0.4548	0.5219	0.5244	0.5244
	5	3	0.3449	0.3418	0.3425	0.6156	0.6177	0.6179
	5	3.5	0.2445	0.2421	0.2425	0.7765	0.7782	0.7785
3	1.1	0.5	1.0575	1.0629	1.0507	0.2420	0.2673	0.2092
	1.1	1	0.9000	0.8936	0.9078	0.3833	0.4055	0.3572
	1.1	1.5	0.7292	0.7170	0.7437	0.4530	0.4698	0.4345
	1.1	2	0.5736	0.5600	0.5897	0.5065	0.5192	0.4931
	1.1	2.5	0.4387	0.4259	0.4536	0.5690	0.5788	0.5589
	1.1	3	0.3231	0.3123	0.3356	0.6612	0.6690	0.6534
	1.1	3.5	0.2241	0.2158	0.2335	0.8191	0.8254	0.8129
	3	0.5	1.0162	1.0165	1.0185	0.0622	0.0634	0.0717
	3	1	0.9627	0.9623	0.9588	0.1538	0.1552	0.1682
	3	1.5	0.8725	0.8716	0.8625	0.2384	0.2396	0.2534
	3	2	0.7589	0.7577	0.7448	0.3198	0.3206	0.3337
	3	2.5	0.6329	0.6317	0.6170	0.4092	0.4099	0.4218
	3	3	0.5019	0.5008	0.4864	0.5246	0.5251	0.5358
	3	3.5	0.3708	0.3699	0.3575	0.7017	0.7021	0.7116
	5	0.5	1.0089	1.0085	1.0101	0.0330	0.0311	0.0379
	5	1	0.9774	0.9783	0.9752	0.0962	0.0927	0.1046
	5	1.5	0.9152	0.9178	0.9089	0.1677	0.1637	0.1775
	5	2	0.8256	0.8297	0.8159	0.2458	0.2417	0.2555
	5	2.5	0.7143	0.7192	0.7026	0.3368	0.3329	0.3461
	5	3	0.5868	0.5920	0.5746	0.4561	0.4524	0.4646
	5	3.5	0.4481	0.4529	0.4370	0.6379	0.6345	0.6457

11-الاستنتاجات: (Conclusions)

• تشير النتائج إلى أن طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLSE) تعد الأنسب لتقدير المعلمات في العينات الصغيرة عند حجم العينة ($n = 50$) ، حيث قدمت تقديرات دقيقة وحقت أقل قيم لمتوسط مربعات الخطأ (MSE) مقارنة بطريقة الإمكان الأعظم (MLE) في العديد من الحالات.

• أظهرت النتائج أن طريقة الإمكان الأعظم (MLE) عند حجم العينة ($n = 100$) تقدم أداءً متفوقاً، حيث سجلت أقل القيم لكل من متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE) للمعاملين α و β ، مقارنة بأسلوب المربعات الصغرى (LSE) والمربعات الصغرى الموزونة (WLSE) ويعكس هذا التفوق الخصائص النظرية لطريقة MLE، مثل الكفاءة المتسقة (asymptotic efficiency)، مما يجعل تقديراتها أكثر دقة واستقراراً مع زيادة حجم العينة.

• نستنتج أنه عند حجم العينة ($n = 150$) ، تُظهر طريقة الإمكان الأعظم (MLE) استقراراً أكبر مع زيادة حجم العينة، لا سيما في الحالات التي تتطلب دقة عالية في التقدير، مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLSE) ، حيث سجلت MLE أقل القيم لكل من متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ المطلق (MAE) للمعاملين α و β ، مما يعكس كفاءتها العالية في التقدير.

التوصيات:

1- يُوصى باعتماد طريقة الإمكان الأعظم MLE، في تقدير معلمات توزيع لوماكس المعكوس المبتور. لما أظهرته من كفاءة أعلى. مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الموزونة، خاصة مع زيادة حجم العينة

2- يُستحسن استخدام أسلوب المحاكاة كأداة أساسية لتقييم أداء طرائق التقدير المختلفة قبل تطبيقها على البيانات الحقيقية، لما يوفره من بيئة تجريبية مرنة لاختبار كفاءة النماذج.

3- يفضل استعمال برامج تحليل إحصائي متقدمة مثل R أو Python للحصول على نتائج دقيقة وفعالة في تنفيذ تجارب المحاكاة وعمليات التقدير.

4- يُقترح إجراء دراسات مستقبلية، تتضمن مقارنة هذا التوزيع مع توزيعات أخرى، أو استخدام طرائق تقدير إضافية. مثل التقدير البايزي لتعزيز نتائج البحث

المصادر

1-Abbasi, J. A. A. (2021). Assessment of land sensitivity to desertification for Al Mussaib project using MEDALUS approach. Caspian Journal of Environmental Sciences, 20(1), 177–196.

2-Al-Nasser, A. M. (2009). Statistical reliability. Ithra Publishing and Distribution, University of Baghdad.



- 3-Bantan, R. A. R., Elgarhy, M., Chesneau, C., & Jamal, F. (2020). Estimation of entropy for inverse Lomax distribution under multiple censored data. *Entropy*, 22(6), 601.
- 4-Doke, A. (2019). Delineation of the groundwater potential using remote sensing and GIS: A case study of Ulhas Basin, Maharashtra, India. *Archives of Photogrammetry, Cartography and Remote Sensing*, 31, 49–64.
- 5-El-Damrawy, H. H. (2024). The beta-truncated Lomax distribution with communications data. *DJS*, 48(1), 135–144.
- 6-Feldmann, P., & Barré, N. (1997). *Cartographie des orchidées sauvages du département de la Guadeloupe (Technical report)*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4584.1762>
- 7-Kang, G., & James, J. (2004). Service quality dimensions: An examination of Gronroos's service quality model. *Managing Service Quality*. <https://doi.org/10.1108/09604520410546806>
- 8-Kumar, D., Yadav, A. S., Singh, S. K., Singh, U., & Chauhan, P. K. (2017). Transmuted inverse Lomax distribution. *Journal of Advanced Computation*.
- 9-Kumphon, D., & Gupta, R. D. (2011). An extension of the generalized exponential distribution. *Statistical Methodology*, 8(4), 695–496.
- 10- Lee, E. T., & Wang, J. W. (2003). *Statistical methods for survival data analysis (3rd ed.)*. Wiley.
- 11- Collett, D. (2003). *Modeling survival data in medical research*. Chapman and Hall.
- 12- Mirsephai, A., Mohammadzaheri, M., Chen, L., & O'Neill, B. (2012). An artificial intelligence approach to inverse heat transfer modeling of an irradiative dryer. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 39, 40–45.
- 13- Singh, S. K., Singh, U., & Sharma, V. K. (2014). The truncated Lindley distribution: Inference and application. *Journal of Statistics Applications & Probability*, 3(2), 219.
- 14- Sinha, S. K., & Kale, B. K. (1986). *Life testing and reliability estimation*. Wiley Eastern Limited.

15- Yadav, A. S., Shukla, S., & Kumari, A. (2019). Statistical inference for truncated inverse Lomax distribution and its application to survival data. Annals of Data Science.

A Comparative Study of Estimation Methods for the Survival Function of the Truncated Inverse Lomax Distribution with an Applied Study

Ahmed Shamkhi Sahib^{A*}, Amina Kareem Issa^{B*}

A Department of Statistics, College of Administration and Economics,
Al-Mustansiriya University

B Department of Statistics, College of Administration and Economics,
Al-Mustansiriya University

07713418380

Abstract

This study aims to investigate the Truncated Inverse Lomax Distribution and estimate its associated survival function using two statistical methods: Maximum Likelihood Estimation (MLE) and Weighted Least Squares Estimation (WLSE). The distribution is considered heavy-tailed and is known for its flexibility in modeling positively skewed data within a bounded interval, making it particularly suitable for survival data analysis. A simulation study was conducted using different sample sizes (50, 100, and 150) to evaluate the performance of both estimation methods based on the Mean Squared Error (MSE) and the Mean Absolute Error (MAE) criteria. The results indicated that the WLSE method showed better performance for small sample sizes, while the MLE method provided more efficient estimates for larger samples, which is consistent with the theoretical properties of these estimation techniques. These findings emphasize the importance of selecting an appropriate estimation method according to the sample size and the nature of the data.

Keywords: Survival Analysis, Statistical Estimation Methods, Maximum Likelihood Estimation, Weighted Least Squares Estimation, Truncated Inverse Lomax Distribution, Simulation Study, Estimation Accuracy Criteria, And Statistical Estimation Errors.