مقارنة بعض طرائق تقدير معلمات أنموذج راش

أ. د. دجلة ابراهيم مهدي
كلية الادارة والاقتصاد/جامعة بغداد
م. وضاح صبري ابراهيم
كلية الادارة والاقتصاد/جامعة المستنصرية

المستخلص:

تم وصف اجراء تقدير لمعلمات أنموذج راش عن طريق أجراء ثلاث طرائق (طريقة تقدير الامكان الاعظم ، طريقة التقدير التقريب لكوهين، والتقدير بالطريقة البيزية)، والمقارنة بينها بطريقة المحاكاة ولعدة احجام عينات (عدد الأفراد، وعدد البنود) ولعدة قيم ثابته لمعلمات التوزيعات المستعملة في المحاكاة، ومن مقارنة الطرائق لأيجاد تقدير معلمة صعوبة البند ($\widehat{\emptyset}_j$)، ومعلمة قدرة الفرد ($\widehat{B}_i$)، فأن القيمة الأفضل لمعلمات أنموذج راش للتوزيعات المتقطعة والمستمرة كنت التقدير بالطريقة البيزية، بالأعتماد على معيار متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE).

المصطلحات المستخدمة: انموذج راش، دالة الأمكان الأعظم، الطريقة البيزية، طريقة كوهين، المحاكاة.

1. المقدمة:

يسعى علماء القياس والمعنيون بالعلوم التربوية والنفسية والصحية للتوصل الى الموضوعية في قياس سلوك الأفراد وأستجاباتهم، فقد بات بناء الأداة التي تمكن الباحث من الوصول الى التقدير الموضوعي لسلوك الفرد (أستجابة الفرد)، وكذلك صعوبة البند من الأمور الضرورية لدراسة السلوك.

يعد أنموذج راش من أهم نماذج السمة الكامنة للنظرية المعاصرة لقياس سلوك الفرد، المبني على البيانات المصنفة، ومن بين الاسباب التي تجعل هذا الأنموذج مهماً هو ما يتميز به من بناء على أساس نظرية الاحتمالات، وهو أحد نماذج الاستجابة للفقرة الاحادية البعد، بمعنى أن درجة الفرد في الاختبار لا يجب أن تكون دالة (تقيم) لعينة الأفراد التي استعملت في معيار البنود (Item Calibration)، والتي يشتمل عليها الاختبار، كما يجب أن يحصل الفرد على نفس الدرجة في كل من اختبارين يقيسان نفس السمة (المقدرة).

يظهر التحليل الرياضي لأنموذج راش قوياً من الناحية الاحصائية، وأن مقدرات معلمات الأنموذج تكون متكافئة وغير متحيزوة، كما أثبت ذلك كل من (Rasch 1961, Andersen 970,1972,1973)[3]،[4]،[5]،[8]، وهنالك عدة طرائق لتقدير معلمات الأنموذج وهذه الطرائق تستخدم أساليب التحليل العددي ، كما اشر لها كل من (Wright and Mead (1975, 1977), and Wright and Douglas (1975a, 1975b, 1976, 1977b.) [10]،[11]،[12]،[13] [14]،[15]،[16]، وقام الباحثان (Swaminathan & Gifford 1982) [7]، بدراسة مقارنة بين التقدير بالطريقة البيزية وطريقة الامكان الاعظم من خلال المحاكاة، وفي عام (1983) قام الباحث (Choppin) [6]،[7]، بوضع دراستين يوضح فيهما كيفية معالجة تقدير معلمة صعوبة البند لأنموذج راش من خلال الفصل بين معالم لأنموذج، حيث قام بمقارنة اثنين من البنود في وقت واحد لفصل معالم قدرة الافراد عن معالم صعوبة البنود، وقام بوصف صعوبة مجموعة من البنود بتكوين مصفوفة مختزلة فيها كل عنصر هو عدد الافراد الذين استجابوا بشكل صحيح لبند واحد، وكذلك بشكل غير صحيح الى بند أخر، ويقوم أنمموذج راش على افتراضات أساسية ذكرت من قبل الباحث (Wright and Mead (1975, 1977) وهي: افتراض أحادية البعد (Unidimensionality) والاستقلال ألموضعي (Local Independence) والمطابقة لمنحنى خصائص البند،

2. طريقة تقدير الأمكان الأعظم [1]: The Maximum Likelihood Estimation Method (MLE):

يمكن صياغة المعادلة العامة لأنموذج راش على الشكل الأتي[1]،[2]:

$$P(X_{ij}/B_i, \emptyset_j) = \frac{\exp[X_{ij}(B_i-\emptyset_j)]}{1+\exp(B_i-\emptyset_j)} \qquad \dots(1)$$

أذ أن:

$$X_{ij} = 1,0 \ , \quad i = 1,2,\dots,n \ , \ j = 1,2,\dots m$$

أن الأنموذج اعلاه يميز العلاقة بين الأفراد (i) والبنود (j)، وهنالك شروط تفرض على الأنموذج، وهي عدم وجود استجابة كاملة لجميع البنود في الاسئلة من قبل احد الأفراد، وأيضا عدم وجود صعوبة كاملة لجميع البنود في الأسئلة، كما موضح بالصيغ على النحو الاتي[10]،[11]:

$$\sum_j^m X_{ij} \neq m \neq 0 \qquad \dots(2)$$

$$\sum_i^n X_{ij} \neq n \neq 0 \qquad \dots(3)$$

أن مجموع صفوف من درجات الاستجابة الأفراد (i) لمجموعة من البنود (j)، يكون:

$$r_i = \sum_j^m X_{ij} \qquad i = 1,\dots,n \qquad \dots(4)$$

أذ أن (r_i) هي الدرجة التي يحصل عليها الافراد (i)[15].

وأن مجموع الأعمدة من درجات الاستجابة لمجموعة من الأفراد على مجموعة من البنود (j) يكون:

$$C_j = \sum_i^n X_{ij} \qquad j = 1, \dots, m \qquad \dots (5)$$

أن دالة الأمكان الأعظم لمصفوفة من البيانات، ولأنموذج في المعادلة (1) لكل من قدرة الفرد (i)، مع صعوبة البند (j) تكون[14،15]:

$$L = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m P(X_{ij}/B_i, \emptyset_j) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \left[\frac{\exp[X_{ij}(B_i-\emptyset_j)]}{1+\exp(B_i-\emptyset_j)}\right] \qquad \dots (6)$$

وتكون بالشكل الأتي:

$$L = \frac{\exp(\sum_i \sum_j X_{ij} B_i).\exp(-\sum_i \sum_j X_{ij} \emptyset_j)}{\prod_i^n \prod_j^m [1+\exp(B_i-\emptyset_j)]} \qquad \dots (7)$$

وأن مجموع معلمات صعوبة البنود المقدرة تساوي صفر، حيث يمكن تمثيلها بالقيد الأتي:

$$\sum_j \widehat{\emptyset}_j = 0 \qquad \dots (8)$$

وبأخذ اللوغارتم الى طرفي المعادلة (7) وباستعمال مضاعف لاكرانج نحصل على[6]:

$$\text{Ln } L = \sum_i r_i B_i - \sum_j c_j \emptyset_j - \sum_i \sum_j \text{Ln}[1 + \exp(B_i - \emptyset_j)] + \lambda \sum_j \widehat{\emptyset}_j \qquad \dots (9)$$

وسيتم أشتقاق المعادلة (9) على النحو الأتي:

$$\frac{\partial \text{Ln } L}{\partial B_i} = r_i - \sum_j \frac{\exp(\widehat{B}_i - \widehat{\emptyset}_j)}{1+\exp(\widehat{B}_i - \widehat{\emptyset}_j)} \qquad \dots (10)$$

$$= r_i - \sum_j \widehat{P}_{ij} \qquad \dots (11)$$

$$\frac{\partial \text{Ln } L}{\partial \emptyset_j} = -c_j + \sum_i \frac{\exp(\widehat{B}_i - \widehat{\emptyset}_j)}{1+\exp(\widehat{B}_i - \widehat{\emptyset}_j)} + \lambda \qquad \dots (12)$$

$$= -c_j + \sum_i \widehat{P}_{ij} + \lambda \qquad \dots (13)$$

بمساواة المعادلتين (11) و (13) الى الصفر، ومن ثم إيجاد الحل لهما، ولكن هنا نحتاج الى تحديد قيمة (λ)، ومن خلال المعادلة (11) بعد مساواتها الى الصفر، وأخذ المجموع لكل الأفراد نجد أن:

$$\sum_i \sum_j X_{ij} = \sum_i \sum_j \widehat{P}_{ij} \qquad \dots (14)$$

وأن المعادلة (13) بعد مساواتها للصفر، وأخذ المجموع لكل البنود نجد أن:

$$-\sum_j c_j + \sum_i \sum_j \widehat{P}_{ij} + \sum_j \hat{\lambda} = 0 \qquad \dots (15)$$

أو $-\sum_i \sum_j X_{ij} + \sum_i \sum_j \hat{P}_{ij} + m\hat{\lambda} = 0 \quad \dots(16)$

هنا لا تتحقق المعادلة (16) الا اذا كانت قيمة (λ) مساوية الى الصفر.

كما قلنا سابقا هنالك شروط تفرض عدم وجود استجابة كاملة لجميع البنود في الاسئلة من قبل احد الأفراد أو العكس، وكذلك حذف البند الذي يتم الاستجابة عليه من قبل كل الافراد او العكس عدم الاستجابة عليه، ولا ننسى أن قدرة الفرد يمكن ان تتمثل بالدرجة التي يحصل عليها من الاستجابات والمتمثلة لكل صف.

يلاحظ من المعادلات (10) و (12)، لا يمكن ايجاد كل من $(\hat{\emptyset}_j , \hat{B}_i)$، فأيتم اللجوء الى الحل التكراري وباستعمال طريقة نيوتن–رافسون، نحتاج لأيجاد المشتقة الثانية، وعلى النحو الأتي[7]:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial B_i^2} = -\sum_j \hat{P}_{ij}\left(1 - \hat{P}_{ij}\right) < 0 \quad \dots(17)$$

وكذلك فأن: $$\frac{\partial^2 L}{\partial \emptyset_j^2} = -\sum_i \hat{P}_{ij}\left(1 - \hat{P}_{ij}\right) < 0 \quad \dots(18)$$

ويلاحظ أن مجموع الأستجابات لكل صف تمثل قيمة وهي الدرجة التي يحصل عليها الفرد للتقييم من ناحية نجاحه في الاختبار أو فشله لأستجابته لمجموعة من البنود، ومن المعروف أن قدرة الفرد يمكن أن تتكافئ (تقيم) من خلال الدرجة التي حصل عليها من الأستجابات، والتي يمكن تعريفها بالدرجة الخام.

لأيجاد التقدير من المعادلات (11) و (13) يجب ان تعتمد على درجة الفرد الحاصل عليها من جراء الاختبار، ويمكن صياغة المعادلة (1)، في حالة الاستجابة (X=1)، على النحو الأتي:

$$\hat{P}_{rj} = \frac{\exp(\hat{B}_r^* - \hat{\emptyset}_j)}{1+\exp(\hat{B}_r^* - \hat{\emptyset}_j)} \quad \dots(19)$$

أذ أن: $\hat{B}_r^*$: تمثل تقدير معلمة قدرة اي فرد حاصل على الدرجة r.

$\hat{P}_{rj}$: يمثل الأحتمال المقدر لأستجابة الفرد (i) ذو الدرجة (r)، على البند (j).

بالتالي فأن : $$\sum_i^n \hat{P}_{rj} = \sum_r^{m-1} n_r \hat{P}_{rj} \quad \dots(20)$$

أذ أن: n_r : تمثل عدد الافراد الحاصلون على الدرجة r .

نبدأ بأيجاد القيم الأولية من خلال احتساب $(\hat{\emptyset}_j^0)$ وذلك على أفتراض أن $(\hat{B}_r^*)$ مساوي الى الصفر، وبالعكس يتم أيجاد قيم $(\hat{B}_r^0)$ على افتراض أن $(\hat{\emptyset}_j)$ مساوي الى الصفر[15].

ومن خلال التبسيط نتوصل الى:

$$\widehat{\emptyset}_j^{0^*} = \mathrm{Ln}\left[\frac{n-c_j}{c_j}\right] \qquad j = 1,2,\dots m \qquad \dots(21)$$

ثم يجب تطبيق الشرط (8) وذلك من خلال تطبيق ما يلي:

$$\widehat{\emptyset}_j^0 = \widehat{\emptyset}_j^{0^*} - \frac{\sum \hat{\emptyset}_j^{0^*}}{m} \qquad \dots(22)$$

وبعد الحصول على القيم الاولية لمعلمة صعوبة البند حسب المعادلة (19)، يمكن الحصول على القيم الاولية لقدرة الفرد من خلال المعادلة (10)، وذلك على النحو الاتي:

$$\widehat{B}_r^0 = \mathrm{Ln}\left[\frac{r}{m-r}\right] \qquad ,r = 1,2,\dots,(m-1) \qquad \dots(23)$$

الأن يمكن وضع معادلة نيوتن_رافسون لأيجاد قيمة معلمة صعوبة البند بالشكل الأتي:

$$\widehat{\emptyset}_j^{t+1} = \widehat{\emptyset}_j^t - \frac{-c_j + \sum_{r=1}^{m-1} n_r \hat{p}_{rj}^t}{\sum_{r=1}^{m-1} n_r \hat{p}_{rj}^t (1-\hat{p}_{rj}^t)} \qquad \dots(25)$$

أذ أن: $\hat{P}_{rj}^t$: يمثل الأحتمال المقدر لأستجابة الفرد (i) ذو الدرجة (r)، على البند (j)، بلأعتماد على القيم الأولية لمعلمة قدرة الفرد ($\widehat{B}_r^0$)، يمكن وضع معادلة نيوتن_رافسون لأيجاد قيمة معلمة قدرة الفرد الحاصل على الدرجة (r) بالشكل الأتي:

$$\widehat{B}_r^{t+1} = \widehat{B}_r^t - \frac{r - \sum_j^m \hat{p}_{rj}^t}{\sum_j^m \hat{p}_{rj}^t (1-\hat{p}_{rj}^t)} \qquad \dots(26)$$

3. طريقة تقدير التقريب لكوهين[6]،[13]: Cohen's Approximation Estimation Method (CA):

لتقدير معلمات الأنموذج بطريقة كوهين، أن تقديرات معلمات أنموذج راش (معلمة قدرة الفرد، ومعلمة صعوبة البند)، تقترب للتوزيع الطبيعي من خلال تقديرها بطريقة الامكان الاعظم، أي أن توزيع قدرة الافراد وصعوبة البنود يمكن وصفها بواسطة التوزيع الطبيعي[6]،[13].

لتطبيق هذا التقريب نقوم بالخطوات الأتية[11]،[13]:

1- أيجاد التقديرات الاولية لصعوبات البنود وقدرات الأفراد، حسب المعادلات (21) و(23).

2- أحتساب الأنحرافات للقيم التقديرية لمعلمة صعوبة البند كما موضح في المعادلة (22).

3- أحتساب التباين لمعلمة صعوبة البنود من المعادلة الأتية:

$$D = \sum_j^m \left(\widehat{\emptyset}_j^0\right)^2 / [(m-1)(2.89)] \qquad \dots(27)$$

أذ أن: 2.89=1.72 ، وأن 1.7 هي قيمة مقربة من جداول التوزيع الطبيعي لقيمة $(5\alpha = 0.0)$.

4- أحتساب الأنحرافات للقيم التقديرية لمعلمة قدرة الفرد من خلال استعمال المعادلة (23)، وعلى النحو الأتي:

$$\hat{B}_g^0 = \hat{B}_g^{0*} - \frac{\sum_g^{m-1} \alpha_g . \hat{B}_g^{0*}}{n} \quad , g = 1, \dots, (m-1) \quad \dots (28)$$

5- أحتساب التباين لمعلمة قدرة الافراد من المعادلة الأتية:

$$B = \sum_g^{m-1} \left(\hat{B}_g^0\right)^2 / [(n-1)(2.89)] \quad \dots (29)$$

6- أحتساب كل من قيمة U، V وعلى النحو الأتي:

$$U = [(1+B)/(1-BD)]^{1/2} \quad \dots (30)$$

$$V = [(1+D)/(1-BD)]^{1/2} \quad \dots (31)$$

7- أحتساب التقديرات النهائية من خلال المعادلات الاتية:

$$\hat{\emptyset}_j = U\hat{\emptyset}_j^0 \quad j = 1, \dots, m \quad \dots (32)$$

$$\hat{B}_r = V\hat{B}_r^0 \quad g = 1, \dots, (m-1) \quad \dots (33)$$

4. التقدير بالطريقة البيزية : The Bayesian Estimation Method:

نفترض توزيعاً أحتمالياً (The Prior distribution) للمعلمات $(B_i, \emptyset_j)$ تكون بالصيغ الأتية:

$$B_i \sim N(\mu_B, \sigma_B^2) \quad i = 1, \dots, n \quad \dots (34)$$

$$\emptyset_j \sim N(\mu_\emptyset, \sigma_\emptyset^2) \quad j = 1, \dots, m \quad \dots (35)$$

ومن خلال استعمال قاعدة (Jeffery) يتم تحديد التوزيعات الاحتمالية الاولية لكل من (μ, σ)، ولكل معلمات $(B_i, \emptyset_j)$، ولستقلالية المعلمات يمكن القول أن المعلومات الاولية حول المعلمات $(\mu_B, \mu_\emptyset)$، لها توزيع ثابت أي أن[9]:

$$P(\mu_B, \sigma_B^2) \propto P(\sigma_B^2) \quad \dots (36)$$

وكذلك فأن:

$$P(\mu_\emptyset, \sigma_\emptyset^2) \propto P(\sigma_\emptyset^2) \quad \dots (37)$$

بما أن المعلمات $(\sigma_B^2, \sigma_\emptyset^2)$، هما تباين لكل من المعلمات $(B_i, \emptyset_j)$، نستطيع القول حسب قاعدة (Jeffery)، كانت لها نوزيع معكوس كاما (Invers Gamma Distr.)، وعلى النحو الاتي:

$$P(\sigma_B^2/\delta_B, \gamma_B) \propto (\sigma_B^2)^{-(\delta_B+1)} \exp\left(\frac{-\gamma_B}{\sigma_B^2}\right) \quad \dots (38)$$

وأن: $$P(\sigma_{\emptyset}^2/\delta_{\emptyset}\ ,\gamma_{\emptyset}) \propto (\sigma_{\emptyset}^2)^{-(\delta_{\emptyset}+1)} \exp\left(\frac{-\gamma_B}{\sigma_{\emptyset}^2}\right) \quad \dots(39)$$

وأن دالة الكثافة الاحتمالية الاولية المشتركة تكون بالشكل الأتي:

$$P(B_i\ ,\emptyset_j) \propto P(B_i/\mu_B\ ,\sigma_B^2).P(\emptyset_j/\mu_{\emptyset}\ ,\sigma_{\emptyset}^2) \quad \dots(40)$$

$$P(B_i\ ,\emptyset_j) = \prod_i^n P(B_i/\mu_B\ ,\sigma_B^2).\prod_j^m P(\emptyset_j/\mu_{\emptyset}\ ,\sigma_{\emptyset}^2) \quad \dots(41)$$

$$= (\sigma_B^2)^{-n/2}\exp\left[\frac{-[\sum_i(B_i-B_.)^2+n(B_.-\mu_B)^2]}{2\sigma_B^2}\right].(\sigma_{\emptyset}^2)^{-n/2}\exp\left[\frac{-[\sum_j(\emptyset_j-\emptyset)^2+m(\emptyset_.-\mu_{\emptyset})^2]}{2\sigma_{\emptyset}^2}\right] \quad \dots(42)$$

أذ أن: ($B_.$): تمثل الوسط الحسابي لمعلمات قدرة الأفراد.

($\emptyset_.$): تمثل الوسط الحسابي لمعلمات صعوبة البنود.

ويمكن القول بأن: $$\int_{-\infty}^{\infty}\exp-\left[\frac{n(B_.-\mu_B)^2}{2\sigma_B^2}\right]d\mu_B \propto (\sigma_B^2)^{1/2} \quad \dots(43)$$

وكذلك: $$\int_{-\infty}^{\infty}\exp-\left[\frac{m(\emptyset_.-\mu_{\emptyset})^2}{2\sigma_{\emptyset}^2}\right]d\mu_{\emptyset} \propto (2\sigma_{\emptyset}^2)^{1/2} \quad \dots(44)$$

ويتم تحديد التوزيع اللاحق المشترك (The joint posterior distribution) للمعلمات $(B_i,\emptyset_j)$، يكون كالاتي[7]:

$$P(B_i\ ,\emptyset_j/x) \propto L(B_i\ ,\emptyset_j/x).P(B_i\ ,\emptyset_j).P(\sigma_B^2/v_B).P(\sigma_{\emptyset}^2/v_{\emptyset}) \quad \dots(45)$$

تم الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية الاولية المشتركة، وأن التوزيع اللاحق المشترك (The joint posterior distr.) لمعلمات الأنموذج $(B_i,\emptyset_j)$، وحسب المعادلة (41) سيكون على النحو الاتي:

$$P(B_i\ ,\emptyset_j/x) \propto L(B_i\ ,\emptyset_j/x).(\sigma_B^2)^{-(n-2\delta_B-1)/2}\exp\left[\frac{-[2\gamma_B+\sum_i(B_i-B_.)^2]}{2\sigma_B^2}\right].$$

$$(\sigma_{\emptyset}^2)^{-(m-2\delta_{\emptyset}-1)/2}\exp\left[\frac{-\left[2\gamma_{\emptyset}+\sum_j(\emptyset_j-\emptyset_.)^2\right]}{2\sigma_{\emptyset}^2}\right] \quad \dots(46)$$

ومن خلال استعمال المعادلة بالصسغة الاتية :

$$\int_0^{\infty} a^{-c}\exp\left[\frac{-K}{a}\right]da \propto k^{-(c-1)} \quad \dots(43)$$

ومعادلة الأمكان الأعظم نحصل على[13]:

$$P(B_i\ ,\emptyset_j/x) = \exp\left(\sum_i r_i\,B_i\right).\exp\left(\sum_j c_j\,\emptyset_j\right).\left[2\gamma_B+\sum_i(B_i-B_.)^2\right]^{-(n-2\delta_B-3)/2}.$$

$$\left[2\gamma_{\emptyset}+\sum_i(\emptyset_j-\emptyset_.)^2\right]^{-(m-2\delta_{\emptyset}-3)/2}.\left\{\prod_i^n\prod_j^m[1+\exp(B_i-\emptyset_j)]\right\}^{-1} \quad \dots(47)$$

ونأخذ اللوغاريتم الطبيعي ومن ثم أيجاد المشتقة ومساواتها الى الصفر، نجد مشتقة المعادلة (47) للمعلمة (B_i) فنحصل على:

$$\frac{\partial \text{Ln } P(B_i,\emptyset_j/x)}{\partial B_i} = r_i - \frac{(n-2\delta_B-3).(B_i-B_.)}{2\gamma_B+\sum_i(B_i-B_.)^2} - \sum_j \frac{\exp(B_i-\emptyset_j)}{1+\exp(B_i-\emptyset_j)} \quad \dots(48)$$

$$r_i = \sum_j \hat{P}_{ij} + \frac{(\hat{B}_i-\hat{B}_.)}{\vartheta_B} \qquad i = 1,\dots,n \qquad \dots(49)$$

أذ أن: $$\vartheta_B = [2\gamma_B + \sum_i (B_i - B_.)^2]/(n - 2\delta_B - 3) \qquad \dots(50)$$

وكذلك فأن:

$$c_j = \sum_i \hat{P}_{ij} - \frac{(\hat{\emptyset}_j-\hat{\emptyset}_.)}{\vartheta_\emptyset} \qquad j = 1,\dots,m \qquad \dots(51)$$

أذ أن: $$\vartheta_\emptyset = \left[2\gamma_\emptyset + \sum_j (\emptyset_j - \emptyset_.)^2\right]/(m - 2\delta_\emptyset - 3) \qquad \dots(52)$$

وبما أن المعادلات (49) و (51) غير خطية سوف نستعمل طريقة نيوتن_رافسون التكرارية ، وأن المشتقة الاولى للدوال (49) و (51) تكون بالشكل الأتي:

$$\acute{g}(B_i) = \sum_j \hat{P}_{ij}(1-\hat{P}_{ij}) + \left[\vartheta_B\left(1-\frac{1}{n}\right) - 2(\hat{B}_i - \hat{B}_.)^2/(n-2\delta_B-1)\right]/(\vartheta_B)^2 \dots(53)$$

و $$\acute{y}(\emptyset_j) = \sum_i \hat{P}_{ij}(1-\hat{P}_{ij}) + \left[\vartheta_B\left(1-\frac{1}{m}\right) - 2(\hat{\emptyset}_j - \hat{\emptyset}_.)^2/(m-2\delta_\emptyset-1)\right]/(\vartheta_\emptyset)^2 \dots(54)$$

نستعمل دالة نيوتن_رافسون لأيجاد التقديرات وعلى النحو الأتي:

$$\hat{\emptyset}_j^{t+1} = \hat{\emptyset}_j^t - \frac{h(\hat{\emptyset}_j^t)}{\acute{h}(\hat{\emptyset}_j^t)} \qquad \dots(55)$$

$$\hat{B}_i^{t+1} = \hat{B}_i^t - \frac{f(\hat{B}_i^t)}{\acute{f}(\hat{B}_i^t)} \qquad \dots(56)$$

وأن القيم الأولية لمعلمات الأنموذج كما في المعادلات (22) و (23).

5. المحاكاة: Simulation

تم صياغة (3) تجارب محاكاة في كل تجربة تم توليد مصفوفة أستجابات الافراد حسب توزيع معين وكررت كل تجربة 1000 مرة، تم الأعتماد لتجربة المحاكاة على ستة حجوم للعينات متمثلة بعدد الافراد (n) وهي: (n1=10, n2=25, n3=75, n4=150, n5=300, n6=500)، وتم الاعتماد على اربعة حجوم عينات متمثلة في عدد البنود (m)، التي ستجرى على الافراد وهي : (m1=10, m2=20, m3=35, m4=45)، ولثلاثة درجات حرية (5، 10، 20) للتوزيعات في الطرائق البيزية، وأن التوزيعات لتجارب المحاكاة مبينه كما في الجدول (1)، وتم كتابة برنامج محاكاة بلغة (MATLAB) للحصول على النتائج في الجداول اللاحقة.

يتم احتساب تقديرات معلمات انموذج راش حسب الطرق المبينة في الجانب النظري، ثم يتم ايجاد معيار متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) وفق المعادلات الاتية[50]:

$$MAPE(\emptyset_j) = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\emptyset_j - \hat{\emptyset}_j}{\emptyset_j}\right| \quad \dots(57)$$

وكذلك فأن:

$$MAPE(B_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{B_i - \hat{B}_i}{B_i}\right| \quad \dots(58)$$

جدول (1)

يبين التوزيعات المتقطعة والمستمرة المستعملة في المحاكاة مع الصيغ التوليد لها وقيم المعلمات لها[17].

التوزيع	الصيغة	قيم المعلمات
Binomial (n,p)	$X_t = \begin{cases} 1 & if \quad 0 < u \le p \\ 0 & if \quad p < u \le 1 \end{cases}$	P = 0.1, 0.5, 0.9
Normal (μ,σ)	$X_t = \mu + \sigma * (Y_1 \ or \ Y_2)$ $Y_1 = (-2\log(u_1))^{0.5} cos(2\pi u_2)$ $Y_2 = (-2\log(u_1))^{0.5} sin(2\pi u_2)$	$(\mu,\sigma) = (0,1),(0.5,1),(0.5,0.5)$
Beta (α,β)	$X_t = y_1/(y_1+y_2)$ $y_1 = u_1^{\frac{1}{\alpha}} \ , \ y_2 = u_2^{\frac{1}{\beta}} \ , \ y_1 + y_2 < 1$	$(a,b) = (0.5,0.5),(1,2),(2,1)$

جدول (2)

يبين متوسط قيم (MAPE) ولجميع حجوم العينات (n عدد الافراد) و(m عدد البنود) لثلاثة قيم معلمة توزيع Binomial لتقدير معلمة أستجابة الفرد ($\hat{B}_r$) لستة طرائق تقدير

		Binomial_0.1				Binomial_0.5				Binomial_0.9			
		10	20	35	45	10	20	35	45	10	20	35	45
M1	10	1.025771	1.09021	1.220229	1.195842	1.075031	0.89588	1.295171	0.911226	1.080871	1.184443	1.177908	1.208078
	25	1.186183	1.197028	1.212859	1.29633	1.120424	1.211367	1.253252	1.287249	1.196975	1.195698	1.296695	1.177609
	75	1.291036	1.280255	1.315787	1.308237	1.284899	1.285906	1.284316	1.337917	1.276389	1.231165	1.312579	1.238691
	150	1.325814	1.335188	1.297298	1.333694	1.332421	1.345662	1.332545	1.353989	1.341141	1.236363	1.335516	1.301238
	300	1.343396	1.357591	1.341163	1.357674	1.344118	1.355075	1.321431	1.343312	1.371528	1.349533	1.338311	1.350421
	500	1.347056	1.350515	1.339085	1.366021	1.325991	1.348666	1.350497	1.338952	1.370107	1.386211	1.34893	1.336326
M2	10	1.059439	1.10715	1.241306	1.365636	1.075309	1.332894	1.333719	1.112367	1.100459	1.205901	1.185799	1.227764
	25	1.502597	1.520252	1.334888	1.335958	1.099038	1.257389	1.499102	1.392954	1.410995	1.411527	1.337615	1.288645
	75	1.522472	1.627857	1.547768	1.375211	1.465095	1.593023	1.718217	1.411093	1.318897	1.300782	1.373596	1.579993
	150	1.396825	1.590993	1.641791	1.42993	1.559386	1.656423	1.771513	1.45012	1.611476	1.679195	1.424586	1.711317
	300	1.510433	1.54629	1.503512	1.455058	1.592397	1.687785	1.798423	1.405438	1.726951	1.804594	1.42439	1.50411
	500	1.422888	1.433016	1.403618	1.573904	1.429777	1.483209	1.492903	1.841596	1.530496	1.531943	1.525135	1.391589
M3	10	0.442479	0.172701	0.058886	0.060237	0.188279	4.156988	0.079679	0.386221	0.681172	0.012785	0.03176	0.049448
	25	0.048403	0.049372	0.0667	0.089903	0.079542	0.102766	0.099766	0.107386	0.047031	0.04872	0.090183	0.220963
	75	0.110638	0.125533	0.113828	0.095151	0.124571	0.140694	0.154174	0.090302	0.097319	0.167038	0.090964	0.211796
	150	0.091877	0.115787	0.132258	0.094471	0.114808	0.129271	0.152149	0.090656	0.123509	0.178618	0.091115	0.129118
	300	0.109217	0.109737	0.106587	0.089422	0.115086	0.128729	0.148921	0.087908	0.119494	0.135193	0.093505	0.095291
	500	0.087834	0.087469	0.087776	0.095417	0.106712	0.107724	0.106046	0.167644	0.094518	0.090713	0.108128	0.085832

جدول (3)

يبين متوسط قيم (MAPE) ولجميع حجوم العينات (n عدد الافراد) و(m عدد البنود) لثلاثة قيم معلمات توزيع Normal لتقدير معلمة أستجابة الفرد ($\hat{B}_r$) لستة طرائق تقدير

		Normal_0_1				Normal_0.5_1				Normal_0.5_0.5			
		10	20	35	45	10	20	35	45	10	20	35	45
M1	10	1.082194	1.204333	1.272359	1.296087	1.075177	1.218189	1.283264	1.294102	1.080624	1.206275	1.279028	1.294684
	25	1.295398	1.294811	1.292137	1.293999	1.298179	1.299223	1.304207	1.290619	1.303362	1.313959	1.30298	1.290401
	75	1.294752	1.292908	1.297	1.291206	1.293718	1.30663	1.30914	1.289894	1.296018	1.311294	1.30488	1.289929
	150	1.300422	1.29324	1.290179	1.290835	1.290768	1.293908	1.295765	1.289781	1.291152	1.293987	1.293745	1.289801
	300	1.301256	1.291731	1.29027	1.290222	1.29006	1.292629	1.29368	1.289773	1.290267	1.293167	1.29382	1.289776
	500	1.297228	1.292802	1.290362	1.289951	1.289899	1.290399	1.290839	1.28977	1.289901	1.290864	1.291803	1.28977
M2	10	1.089197	1.20896	1.275613	1.304505	1.075636	1.231885	1.29692	1.298059	1.08631	1.208647	1.288798	1.29916
	25	1.303898	1.302044	1.296424	1.297917	1.307942	1.309378	1.31903	1.291379	1.319908	1.342098	1.316109	1.290963
	75	1.303075	1.297847	1.303578	1.292495	1.300759	1.327229	1.329057	1.290006	1.307289	1.33746	1.319938	1.290071
	150	1.310277	1.296348	1.290611	1.291789	1.292037	1.298261	1.301425	1.289792	1.292773	1.298425	1.297442	1.289831
	300	1.311875	1.293487	1.290808	1.290624	1.290591	1.295688	1.297316	1.289777	1.291028	1.296733	1.297591	1.289783
	500	1.304022	1.295529	1.29095	1.290113	1.290047	1.291039	1.291808	1.289771	1.290059	1.291946	1.29366	1.289772
M3	10	0.292006	0.033765	0.076028	0.069369	0.192636	0.044782	0.059063	0.068919	0.324883	0.041929	0.061041	0.068959
	25	0.099764	0.117481	0.063424	0.068313	0.065319	0.05991	0.060679	0.078479	0.065852	0.06117	0.061349	0.077989
	75	0.196335	0.131245	0.074586	0.079147	0.07972	0.064096	0.063967	0.084505	0.086547	0.06317	0.063743	0.081554
	150	0.128475	0.114448	0.063297	0.081467	0.063326	0.060848	0.069495	0.09003	0.063876	0.060796	0.068332	0.087635
	300	0.143745	0.10508	0.06743	0.089071	0.063617	0.061198	0.070026	0.092423	0.064019	0.060929	0.070533	0.092228
	500	0.084378	0.08161	0.061353	0.092205	0.062076	0.06263	0.077709	0.093649	0.062587	0.063188	0.074334	0.093389

جدول (4)

يبين متوسط قيم (MAPE) ولجميع حجوم العينات (n عدد الافراد) و(m عدد البنود) لثلاثة قيم معلمات توزيع Beta لتقدير معلمة أستجابة الفرد ($\widehat{B}_r$) لستة طرائق تقدير

		Beta_1_2				Beta_2_1				Beta_0.5_0.5			
		10	20	35	45	10	20	35	45	10	20	35	45
M1	10	1.08331	1.210543	1.297998	1.300628	1.108727	1.219559	1.284687	1.299221	1.081645	1.181003	1.289111	1.309122
	25	1.323622	1.34367	1.32349	1.292278	1.309654	1.328044	1.313772	1.297391	1.316638	1.301954	1.298483	1.303595
	75	1.307638	1.322788	1.314899	1.291481	1.317721	1.337778	1.322351	1.290933	1.320416	1.301073	1.29314	1.295232
	150	1.298238	1.304115	1.302428	1.29039	1.295855	1.301171	1.300942	1.290606	1.339252	1.30951	1.299186	1.29258
	300	1.29625	1.302224	1.30151	1.290164	1.296351	1.301401	1.299321	1.290048	1.34084	1.313081	1.296961	1.291083
	500	1.293165	1.296254	1.294687	1.290002	1.292791	1.295472	1.294596	1.289972	1.330012	1.312688	1.300213	1.29068
M2	10	1.09213	1.222013	1.33396	1.31395	1.145346	1.235468	1.300774	1.312451	1.088303	1.191864	1.311945	1.333853
	25	1.369347	1.413844	1.363698	1.294602	1.335764	1.377846	1.3438	1.3048	1.350179	1.319045	1.315455	1.31655
	75	1.328723	1.361057	1.341431	1.293035	1.351886	1.39768	1.358037	1.291983	1.35608	1.311775	1.298288	1.300199
	150	1.307116	1.318744	1.314879	1.290945	1.302007	1.312655	1.311802	1.291357	1.391699	1.328211	1.309405	1.295099
	300	1.302827	1.314821	1.312905	1.290517	1.303087	1.313128	1.30846	1.290297	1.395109	1.335329	1.304882	1.292254
	500	1.296412	1.302456	1.299252	1.290209	1.295682	1.300905	1.29907	1.290152	1.371292	1.334674	1.310603	1.29149
M3	10	0.209255	0.035351	0.061063	0.065758	0.16916	0.037697	0.074602	0.072645	0.290276	0.05803	0.083901	0.089157
	25	0.059281	0.068218	0.07216	0.085229	0.070186	0.07007	0.072868	0.079454	0.199715	0.192551	0.095547	0.075305
	75	0.063802	0.070438	0.081757	0.090439	0.063354	0.069793	0.08097	0.091271	0.402557	0.29031	0.133164	0.071643
	150	0.069484	0.079639	0.083496	0.093287	0.073666	0.078467	0.086397	0.092315	0.291419	0.205196	0.149351	0.080094
	300	0.074824	0.079417	0.087239	0.093728	0.071926	0.078469	0.087745	0.094057	0.324714	0.250374	0.147125	0.086703
	500	0.082045	0.084703	0.089433	0.094443	0.081651	0.08472	0.089763	0.094515	0.191096	0.180997	0.133455	0.088643

جدول (5)

يبين متوسط قيم (MAPE) ولجميع حجوم العينات (n عدد الافراد) و(m عدد البنود) لثلاثة قيم معلمة توزيع Binomial لتقدير معلمة صعوبة البند ($\widehat{\emptyset}_j$) لثمانية طرائق تقدير

		Binomial_0.1				Binomial_0.5				Binomial_0.9			
		10	20	35	45	10	20	35	45	10	20	35	45
M1	10	0.307901	0.332647	0.331354	0.176594	0.032246	1.340818	0.550537	0.5986	0.418319	0.374773	0.15215	0.329465
	25	0.304368	0.48295	0.322456	0.511703	0.592515	0.533361	0.441063	0.453347	0.523783	0.365158	0.504206	0.680093
	75	0.559776	0.536211	0.695567	0.473939	0.468323	0.56223	0.599016	0.685689	0.7606	0.668083	0.544107	0.932531
	150	0.697157	0.781111	0.6013	0.7486	0.682376	0.745425	0.768672	0.725698	1.000703	0.814363	0.713518	0.984496
	300	0.761742	0.871352	0.767872	0.771218	0.686311	0.790623	0.616058	0.619913	1.010372	0.971652	0.653048	0.883421
	500	0.676964	0.713934	0.603424	1.040257	0.523112	0.642585	0.659582	1.029665	0.934146	0.959778	0.766253	0.546308
M2	10	0.296343	0.308821	0.33595	0.222736	0.318845	0	0.516709	0.232413	0.562702	0.396321	0.171606	0.358279
	25	0.281069	0.422434	0.284427	0.411862	0.460907	0.42079	0.342514	0.370331	0.426341	0.309486	0.402165	0.16489
	75	0.454133	0.408728	0.477807	0.395944	0.36566	0.408296	0.432452	0.460593	0.673432	0.488972	0.398019	0.345823
	150	0.492926	0.493453	0.390223	0.42229	0.456416	0.501166	0.489379	0.485562	0.722702	0.391464	0.462575	0.413317
	300	0.462514	0.542127	0.432085	0.491797	0.481407	0.529638	0.422053	0.412343	0.634499	0.516379	0.452096	0.42827
	500	0.423183	0.433548	0.362431	0.509211	0.349155	0.42803	0.41982	0.435521	0.526941	0.588534	0.450355	0.368153
M3	10	0.01325	0.22796	0.126777	0.067581	0.422908	1.870295	0.224957	0.388132	1.383788	0.141812	0.0681	0.142956
	25	0.068175	0.098085	0.068021	0.165902	0.186791	0.187005	0.117247	0.159926	0.102487	0.082069	0.159686	0.258299
	75	0.150181	0.125929	0.132244	0.10199	0.147554	0.150295	0.129556	0.161723	0.134339	0.205184	0.118045	0.216553
	150	0.153414	0.126863	0.117059	0.110555	0.148557	0.135886	0.098515	0.137795	0.118521	0.191482	0.119896	0.051114
	300	0.129872	0.128496	0.139579	0.14308	0.121778	0.12615	0.068915	0.129622	0.068787	0.054673	0.093752	0.074774
	500	0.138103	0.145306	0.124466	0.058503	0.112968	0.090731	0.095837	0.089904	0.08771	0.124933	0.104891	0.13353

جدول (6)

يبين متوسط قيم (MAPE) ولجميع حجوم العينات (n عدد الافراد) و(m عدد البنود) لثلاثة قيم معلمات توزيع Normal لتقدير معلمة صعوبة البند ($\widehat{\emptyset}_j$) لثمانية طرائق تقدير

		Normal_0_1				Normal_0.5_1				Normal_0.5_0.5			
		10	20	35	45	10	20	35	45	10	20	35	45
M1	10	0.184049	0.180528	0.141282	0.229458	0.064344	0.251824	0.278309	0.130886	0.186134	0.106565	0.176194	0.151129
	25	0.239346	0.207451	0.145109	0.159522	0.243852	0.217327	0.258353	0.050031	0.300163	0.382017	0.295117	0.046347
	75	0.220622	0.157563	0.200362	0.086861	0.176918	0.34768	0.36376	0.023351	0.225141	0.405642	0.323584	0.025645
	150	0.250208	0.148459	0.051364	0.075909	0.083902	0.167792	0.193369	0.007455	0.09697	0.168726	0.157926	0.012719
	300	0.261416	0.120315	0.055335	0.050171	0.053901	0.140822	0.159944	0.004471	0.063392	0.154259	0.15979	0.004789
	500	0.202756	0.153245	0.061293	0.032058	0.028493	0.06714	0.081666	0.002218	0.028897	0.086877	0.112559	0.002609
M2	10	0.410599	0.353771	0.441147	0.602786	0.321875	0.635606	0.702378	0.520265	0.573702	0.399432	0.547008	0.484676
	25	0.843675	1.110579	0.677392	0.370462	0.683193	0.658542	0.560807	0.272191	0.733492	0.832577	0.621097	0.285684
	75	0.908036	1.076039	0.839624	0.185343	0.716055	0.8895	0.608664	0.188765	0.767466	0.882085	0.580658	0.232636
	150	0.645823	0.806495	0.511131	0.154076	0.494112	0.6108	0.431287	0.125991	0.498938	0.613845	0.412683	0.143431
	300	0.655812	0.76134	0.537629	0.098275	0.473745	0.619095	0.398701	0.083571	0.482354	0.59177	0.397721	0.092787
	500	0.475797	0.604532	0.407678	0.068421	0.330372	0.452756	0.283821	0.064826	0.331994	0.453318	0.335212	0.068602
M3	10	0.716055	0.384719	0.260067	0.289736	0.441514	0.465365	0.432664	0.266295	0.821233	0.279099	0.346491	0.246985
	25	0.65569	0.849028	0.467724	0.28728	0.452277	0.408347	0.346024	0.191622	0.453492	0.471345	0.34526	0.205586
	75	0.939059	0.893158	0.533626	0.20218	0.572293	0.539858	0.297193	0.163279	0.609255	0.509199	0.308833	0.198043
	150	0.762987	0.84118	0.447499	0.188747	0.449949	0.45457	0.269821	0.118362	0.457161	0.458163	0.274183	0.133633
	300	0.811321	0.810778	0.493274	0.128609	0.459622	0.485183	0.260504	0.082556	0.463015	0.452832	0.263014	0.089509
	500	0.603422	0.696641	0.417107	0.089848	0.335217	0.393169	0.212456	0.065923	0.330847	0.379821	0.235771	0.069457

جدول (7)

يبين متوسط قيم (MAPE) ولجميع حجوم العينات (n عدد الافراد) و(m عدد البنود) لثلاثة قيم معلمات توزيع Beta لتقدير معلمة صعوبة البند ($\widehat{\emptyset}_j$) لثمانية طرائق تقدير

		Beta_1_2				Beta_2_1				Beta_0.5_0.5			
		10	20	35	45	10	20	35	45	10	20	35	45
M1	10	0.28384	0.255963	0.493767	0.298972	0.54089	0.314784	0.302368	0.266101	0.185616	0.281851	0.348528	0.412847
	25	0.535232	0.697921	0.512197	0.11933	0.387459	0.542786	0.421123	0.205869	0.487463	0.34561	0.279479	0.304247
	75	0.317503	0.503916	0.421713	0.102937	0.409483	0.589072	0.491795	0.078254	0.51253	0.288196	0.148074	0.161796
	150	0.215709	0.318404	0.289416	0.057055	0.177786	0.275728	0.262871	0.059709	0.562914	0.396295	0.263538	0.125119
	300	0.170064	0.299717	0.281254	0.045416	0.178639	0.28923	0.253906	0.038272	0.577727	0.439487	0.234166	0.081462
	500	0.128866	0.21747	0.172806	0.036814	0.114628	0.206652	0.174802	0.033733	0.487998	0.43583	0.275746	0.067772
M2	10	0.546666	0.444473	0.662776	0.56734	0.688342	0.610006	0.468036	0.466027	0.362873	0.451746	0.423003	0.515571
	25	0.742706	0.74389	0.585075	0.268051	0.521774	0.641352	0.510132	0.368249	0.970479	1.176288	0.796523	0.357841
	75	0.555777	0.693783	0.466394	0.197253	0.601534	0.760086	0.516075	0.165762	1.018308	1.220275	0.922194	0.196686
	150	0.411121	0.47485	0.362088	0.113033	0.356119	0.453387	0.330585	0.123949	0.868014	0.91572	0.722761	0.14799
	300	0.356271	0.468946	0.33742	0.095237	0.380702	0.47033	0.313576	0.079734	0.874171	0.953009	0.710978	0.097094
	500	0.274814	0.35727	0.239164	0.073544	0.27331	0.35116	0.23912	0.067646	0.686787	0.777883	0.573438	0.080993
M3	10	0.414914	0.29442	0.336109	0.287993	0.314818	0.390992	0.245307	0.237738	0.61598	0.56989	0.181761	0.148728
	25	0.358965	0.288561	0.251593	0.154249	0.256293	0.278768	0.248624	0.205455	0.969038	1.093422	0.612085	0.245308
	75	0.304637	0.294792	0.186366	0.118348	0.309655	0.296668	0.191061	0.104161	1.332931	1.316501	0.768227	0.233023
	150	0.260798	0.232288	0.169483	0.071921	0.228748	0.237777	0.155777	0.081111	1.135696	1.125605	0.823345	0.203526
	300	0.231447	0.236568	0.143114	0.06364	0.251307	0.246146	0.135862	0.053069	1.200326	1.2451	0.819404	0.144804
	500	0.184596	0.195121	0.118074	0.04832	0.189342	0.196631	0.118315	0.044415	0.936804	1.065168	0.782205	0.12525

6. الاستنتاجات:

1- من خلال مقارنة الطرائق جميعها لتقدير معلمات أنموذج راش، تبين أن افضل تقدير لمعلمة قدرة الفرد ($\tilde{B}_i$)، كانت الطريقة البيزية بالأعتماد على القيمة الأصغر لمعدل متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE)، ولكافة التوزيعات المتقطعة والمستمرة.

2- تبين أيضا من مقارنة الطرائق جميعها لأيجاد تقدير معلمة صعوبة البند ($\tilde{\emptyset}_j$)، أن أن افضل تقدير المعلمة كانت الطريقة البيزية بالأعتماد على القيمة الأصغر لمعدل متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE)، ولكافة التوزيعات المتقطعة والمستمرة.

3- وجد أن كلما زاد حجم العينة لعدد الأفراد (n)، ليس لها تأثير من ناحية تحديد صعوبة أو سهولة بنود الأختبار في حالة الاستجابة الكبير أو المتوسطة أو الصغيرة من قبل الأفراد، ويتجلى ذلك في معيار متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE)، حيث لم يتأثر بزيادة حجم العينة.

7. التوصيات:

بناءاً على ماتم التوصل اليه من استنتاجات ندرج ادناه أهم التوصيات:

1. بالنظر للأستعمال الواسع في مجال العلوم السلوكية والنفسية لبناء الاختبارات التحصيلية، نوصي بأعتماد أنموذج راش للبناء التحصيلي لهذه الأختبارات.
2. أعتماد الطريقة البيزية، والي تعطي أفضل تقدير لمعلمة قدرة الفرد ($\tilde{B}_i$)، لأنموذج راش للأستعمال في البناء التحصيلي للأختبارات النفسية والسلوكية، والتي أثبتت كفاءتها في التقدير.
3. إجراء دراسات مستقبلية تتناول مقارنة الطرائق المعتمدة في الأطروحة مع طرائق أخرى مثلاً طريقة التقليص (Shrinkage Method).

8. المصادر:

1- زكري، علي بن محمد عبد الله،(2009)،"الخصائص السيكومترية لأختبار (أونيس- لينون) للقدرة العقلية مقدرة وفق القياس الكلاسيكي ونموذج راش لدى طلبة المرحلة المتوسطة بمحافظة صبيا التعليمية"، رسالة دكتوراة، جامعة ام القرى / كلية التربية، قسم علم النفس، السعودية.

2- السامرائي، محمد أنور محمود & الخفاجي، أحمد محمد شاكر،(2012)،" بناء اختبار تحصيلي محكي المرجع في مادة علم نفس الخواص لطلبة أقسام العلوم التربوية والنفسية، جامعة بغداد /كلية التربية (ابن رشد)، مجلة الاستاذ -العدد (203)، ، ص 964- 1002، العراق.

3- Andersen, E. B. (1970). "Asymptotic properties of conditional maximum-likelihood estimators". *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 283-301.

4- Andersen, E. B. (1972). "The numerical solution of a set of conditional estimation equations". *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 42-54.

5- Andersen, E. B. (1973). "A goodness of fit test for the Rasch model".*Psychometrika*, *38*(1), 123-140.

6- Choppin, B. (1983). "*A fully conditional estimation procedure for Rasch model parameters"*. University of California, Center for the Study of Evaluation.

7- Choppin, B. (1983). "*The Rasch model for item analysis"*. Center for the Study of Evaluation, University of California.

8- Rasch, G. (1961, June). "On general laws and the meaning of measurement in psychology". In *Proceedings of the fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* (Vol. 4, pp. 321-333). Berkeley, CA: University of California Press.

9- Swaminathan, H., & Gifford, J. A. (1982). "Bayesian estimation in the Rasch model". *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, *7*(3), 175-191.

10- Wright, B. D. (1985). "Additively in psychological measurement" . *Measurement and personality assessment*, 101-112.

11- Wright, B. D., & Douglas, G. A. (1975). "*Best test design and self-tailored testing"*. Statistical Laboratory, Department of Education, University of Chicago.

12- Wright, B. D., & Douglas, G. A. (1977). "Best procedures for sample-free item analysis". *Applied Psychological Measurement, 1*(2), 281-295.
13- Wright, B. D., & Mead, R. J. (1976). "*Rasch Model Analysis with the BICAL Computer Program"*. CHICAGO UNIV IL.
14- Wright, B. D., & Stone, M. H. (1979). "Measurement essentials". *Wilmington. Wide Range Inc*, 221.
15- Wright, B. D., Douglas, G. A., & No, M. (1986). "The rating scale model for objective measurement". *Research Memorandum*, *35*.
16- Wright, B. D., Mead, R. J., & Bell, S. R. (1980). "*BICAL: Calibrating items with the Rasch model"*. Statistical Laboratory, Department of Education, University of Chicago.
17- Young, D. H. & Al-Soadi, S. DH.(1983) "Statistical Theory and Method, Vol.1, Al-Risala Presses, Al-Kwait.

Abstract:

Described an estimate of the parameters of the RASCH model by conducting three methods (The Maximum Likelihood Estimation Method (MLE), Cohen's Approximation Estimation Method (CA), and The Bayesian Estimation Method), and compare manner simulation and several sample sizes (number of persons, and the number of items) and several fixed values for the parameters distributions used in the simulation , and comparing methods to find estimate the difficulty of item parameter ($\hat{\emptyset}_j$), and the person's ability parameter ($\hat{B}_i$), the best value of the parameters of the RASCH model distributions intermittent and persistent I appreciated the Bayesian Estimation Method, depending on the MAPE.

Keyword: the RASCH model, The Maximum Likelihood Estimation Method (MLE), Cohen's Approximation Estimation Method (CA), The Bayesian Estimation Method.