استخدام المحاكاة في المقارنة بين بعض طرائق تقدير معلمة ومعولية توزيع رالي لبيانات تامة وبيانات مراقبة من النوع الاول

م.م انتصار عبيد حسون
كلية التربية – ابن الهيثم – جامعة بغداد

المستخلص :-

تناول كثير من الباحثين نماذج توزيع الفشل والتطبيقات المختلفة لها في حقل المعولية واختبارات الحياة . وفي هذا البحث سيتم تقدير معلمة القياس ودالة المعولية لاحد توزيعات الفشل (رالي) Rayliegh Failure Model ، والتركيز على المقارنة بين بعض طرائق تقدير معلمة القياس ومعولية التوزيع لبيانات تامة وبيانات مراقبة من النوع الاول وتشمل الطرائق طريقة الامكان الاعظم والعزوم وطريقة بيز القياسي ومعيار المقارنة هو MSE . وتم اجراء دراسة تجريبية باستخدام المحاكاة واعطاء قيم مختلفة للمعلمة θ وحجوم عينات مختلفة (n = 10,25,50,100) وكررت التجربة (Rp=500 مرة) للحصول على تجانس كبير بين المقدرات وسيتم تلخيص كل نتائج المحاكاة والمقارنة في جداول خاصة اعدت لهذا الغرض .

هدف البحث :-

يهدف البحث الى استخدام المحاكاة في المقارنة بين بعض طرائق تقدير معلمة القياس ومعولية توزيع رالي وهو من توزيعات الفشل المهمة في حقل المعولية واختبارات الحياة . واعتمد MSE للمقارنة بين النتاج سواء في حالة البيانات التامة او بيانات المراقبة من النوع الاول ، والطرائق التي تم بحثها هي طريقة الامكان الاعظم والعزوم وطريقة بيز القياس.

مقدمة :-

تعتبر عملية التقدير احدى الاركان الاساسية في عملية الاستدلال الاحصائي وهي العملية التي تنجز بواسطتها كل الاستنتاجات الضرورية حول المجتمع ، بناء على المعلومات المستخرجة من العينة الماخوذة من ذلك المجتمع ، وهناك تقدير بنقطة (Point Estimation) (وهو أيجاد قيمة عددية من معلومات العينة حول معملة المجتمع المطلوبة) . وهناك تقدير بفترة ونقصد به ايجاد المجال الذي يضم

المعلمة وسوف نتطرق في بحثنا هذا الى تقدير معلمة توزيع نموذج الفشل الذي وصفه العالم الفيزيائي الانكليزي (Lord Rayleigh) أي توزيع رالي ذو المعلمة الواحدة والذي يستخدم في التحليلات المفردة وتحليلات الخطا لانظمة مختلفة ، وفي دراسة المعولية .

الجانب النظري

توزيع رالي: [1,2,5] Rayleig Distribution

يعتبر توزيع رالي حالة خاصة من توزيع ويبل ذي المعلمتين عندما تكون قيمة معلمة الشكل تساوي (2) ، وتعرف الدالة الاحتمالية لتوزيع رالي بالمعادلة :

$$f(t,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} t\, e^{\frac{-t^2}{\theta}} & , t > 0 \ , \ \theta > 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad \ldots (1)$$

وكما ذكرنا هو حالة خاصة من توزيع ويبل ذي المعلمتين والمعرف بالدالة

$$f(t,\theta,\beta) = \frac{\beta}{\theta} t^{\beta-1}\, e^{-\frac{t^\beta}{\theta}} \quad t > 0 \ , \ \theta,\beta > 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

وعندما $\beta = 2$ نحصل على توزيع رالي المعرف بالمعادلة (1)

ان الدالة التجميعية لتوزيع رالي هي

$$F(t,\theta) = \int_0^t \frac{2}{\theta} u\, e^{-\frac{u^2}{\theta}}\, du = 1 - e^{-\frac{t^2}{\theta}} \quad \ldots\ldots. (3)$$

وطبقا لها تكون دالة المعولية

$$R(t) = pr(T > t) = e^{-\frac{t^2}{\theta}} \quad \ldots\ldots (4)$$

كذلك يكون معدل وقت الفشل (MTTF) Mean Time of failure او كما يسمى معدل الحياة (Mean life)هو

$$E(T) = \int_0^\infty t\ f(t,\theta)\ dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{2}{\theta}\, t^2\, e^{-\frac{t^2}{\theta}}\ dt$$

ولحل التكامل نفرض ان

$$y = \frac{t^2}{\theta} \rightarrow t^2 = \theta\ y$$

$$t = \sqrt{\theta\ y}$$

$$[j] = \left|\frac{dt}{dy}\right| = \frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{y}}$$

$$dt = \frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{y}}\ dy$$

$$E(t) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\theta}(\theta\ y)\, e^{-y}\, \frac{\sqrt{\theta}}{2\sqrt{y}}\, dy$$

$$E(T) = \sqrt{\theta} \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}}\, e^{-y}\, dy = \sqrt{\theta}\ \Gamma(\frac{3}{2})$$

$$= \frac{\sqrt{\theta}\ \sqrt{\Pi}}{2}$$

وحيث ان العزم الرائي لتوزيع ويبل بالمعلمتين (β , μ) هو

$$\mu^r = E(x^r) = \theta^{\frac{r}{\beta}}\, \Gamma(1+\frac{r}{\beta})$$

وحيث ان توزيع رالي هو حالة خاصة من توزيع ويبل فان العزم الاول لتوزيع رالي هو (عندما $\beta = 2$)

$$\mu = E(T) = \theta^{\frac{r}{\beta}}\, \Gamma(1+\frac{1}{\beta}) = \theta^{\frac{1}{2}}\, \Gamma(\frac{3}{2})$$

$$= \theta^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{2}\ \Gamma(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{\theta^{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\theta\ \pi}}{2}$$

وكذلك وجد ان تباين وقت الفشل لتوزيع رالي هو :

$$Var(T) = \theta(1-\frac{\pi}{4}) \quad .... \quad (6)$$

من الصفات المهمة الاخرى لتوزيع رالي ان هذا التوزيع له ذاكرة ومعنى ذلك اذا بقيت الوحدة t مـــن الساعات فان احتمال بقائها لوقت اضافي هو h من الساعات هو :

$\Pr(T) > t+h \mid (T > t)$

$$\Pr(T > t+h \mid T > t) = \frac{\int_{t+h}^{\infty} \frac{2}{\theta} u\ e^{-\frac{u^2}{\theta}}\ du}{\int_{t}^{\infty} \frac{2}{\theta} u\ e^{-\frac{u^2}{\theta}}\ du}$$

$$= e^{\frac{2th - h^2}{\theta}} \quad .... \quad ... \quad (7)$$

وهذا الاحتمال ليس خالي من الزمن t ومعنى ذلك ان احتمال عطل الوحدة خلال مدة زمنية معينة في المستقبل يعتمد على عمر الوحدة وهذا يؤكد ان توزيع رالي ليس عديم الذاكرة .

ومن الخصائص المهمة الاخرى لتوزيع رالي ، ان توزيع رالي يعيد انتاج نفسه reproducing (self) أي ان اصغر احصاءة مرتبة من توزيع رالي هي ايضا تتبع توزيع رالي بالمعلمة $(\frac{\theta}{h})$، فاذا كانت لدينا $(t_{(1)} < t_{(2)} \ldots\ldots < t_{(n)})$ هي اوقات الفشل المرتبة لمجموعة n من الوحدات تحت الاختبار فأن :

$$F_{T_1}(t) = pr\,(T_1 \le t)$$
$$= 1 - pr\,(T_1 > t)$$

وحيث ان :

$$pr(T_{(1)} > t) = pr\left(t_1 > t, t_2 > t, \ldots\ldots t_n > t\right)$$
$$= pr\,(t_1 > t)\; pr\,(t_2 > t) \ldots\ldots\; pr\,(t_n > t)$$

لان المتغيرات $(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n)$ متغيرات مستقلة ومتماثلة التوزيع

$$\therefore pr\;(T_{(1)} > t) = R(t)\,.\,R\,(t) \ldots\ldots R(t)$$
$$= \left[R\,(t)\right]^n$$
$$\therefore F_{T_1}\,(t) = 1 - \left[R\,(t)\right]^n$$
$$= 1 - e^{-n\frac{t^2}{\theta}}$$

وعند الاشتقاق بالنسبة لـــ t نحصل على توزيع الاحصاءه المرتبة الاولى

$$f_{T(1)}(t) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{2nt}{\theta}\, e^{-\frac{nt^2}{\theta}} & t \ge 0 \quad , & \theta > 0 \\ 0 & o.w. & \end{array} \right\} \ldots\ldots\; (8)$$

وهو توزيع رالي بالمعلمة $(\frac{\theta}{n})$.

واذا كان اختبار الوحدات يبدأ بزمن معين وليكن (ξ) عندئذ يمكن اعتماد توزيع رالـــي ذو المعلمتـــين وان دالة الكثافة الاحتمالية له .p.d.f هي

$$f\;(t\,,\theta\;,\xi\;) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{2}{\theta}(t - \xi\;)\; e^{-\frac{(t-\xi\,)^2}{\theta}} & t > \xi & \theta > 0 \\ 0 & o\,.w\,.\;\ldots\ldots\ldots & .\;(9) \end{array} \right.$$

وتمثل θ معلمة القياس (scale parameter)

ξتمثل معلمة العتبة Threshold parameter

او تسمى معلمة الموقع (التموضع) Location parameter

ونحصل على المعادلة 9 من المعادلة 1 بافتراض ان $t = x + \zeta$ ومنها $x = t - \zeta$

$$| j | = \left| \frac{dx}{dt} \right| = 1$$

وباستخدام هذا التحويل نتوصل الى توزيع رالي ذي المعلمتين لدالة احتمالية تبدا من ξ

وقبل البدء بشرح طرق التقدير ، لابد من معرفة نوع البيانات المستخدمة وهي على نوعين منها .

البيانات الكاملة (التامة) Complete Data

وتعني ان الاختبار ينتهي بعد فشل كل الواحدات التي وضعت تحت الاختبار .

اما النوع الثاني فهي بيانات المراقبة Censored data وتعني وحدات وضعت للاختبار وينتهي الاختبار عند الحصول على عدد معين من الوحدات الفاشلة او عند وقت محدد مسبقا .

طرائق التقدير :- Methods of Estimation

أ- في حالة البيانات التامة

1. طريقة الامكان الاعظم Method of Maximum likelihood(ML) تعتبر من الطرق المهمة في التقدير وتمتاز مقدراتها بدقه جيدة مقارنة مع طرائق التقدير الاخرى ومبدأ هذه الطريقة هو ايجاد قيمة تقديرية للمعلمة تجعل دالة الامكان في نهايتها العظمى . ونرمز لدالة الامكان بالرمز (L) وصيغتها

$$L = \pi_{i=1}^{n} f(t_i, \theta)$$

$$L = \left(\frac{2}{\theta}\right)^n \left(\pi_{i=1}^{n} t\ i\right) e^{-\frac{\sum t_i^2}{\theta}} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

ثم نأخذ اللوغاريتم الطبيعي

$$LnL = nLn\ 2 - n\ Ln\ \theta + \sum_{i=1}^{n} Ln\ ti - \frac{\sum_{i=1}^{n} t\ i^2}{\theta}$$

ونأخذ المشتقة بالنسبه ل θ وكالاتي

$$\frac{\partial\ LnL}{\partial\ \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} t\ i^2}{\theta^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

وان مقدر الامكان الاعظم للمعلمةθ وهو حل المعادلة

$$\frac{\partial \; LnL}{\partial \; \theta} = 0$$

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2}}{n} \quad .... \quad . \quad (12)$$

واعتماد على هذا المقدر يكون مقدر الامكان الاعظم لدالة المعولية هو

$$\hat{R}\,(t)_{ML} \quad e^{-\frac{t^2}{\hat{\theta}_{ML}}}$$

$$\therefore \hat{R}\,(t)_{ML} = e^{-\frac{nt^2}{\sum_{i=1}^{n} ti^2}} \quad .... \quad (13)$$

2. مقدر العزوم Moment estimator

تتصف مقدرات العزوم بسهولتها وفكرة طريقة العزوم هي مساوات عزوم المجتمع مع عزوم العينة ثم حل المعادلة الناتجة للحصول على صيغة مقدرة العزوم للمعلمة المطلوبة .

عزم العينة

$$m_1 = \frac{\sum ti}{n} = \bar{t}$$

عزم المجتمع

$$\mu = E(T) = \sqrt{\frac{\theta \pi}{2}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{\sum ti}{n} = \frac{\sqrt{\hat{\theta} \; \pi}}{2}$$

$$\bar{t}^{\,2} = \frac{\hat{\theta} \; \pi}{4}$$

$$\hat{\theta} = \frac{4 \; \bar{t}^{\,2}}{\pi} \quad ..... \quad (14)$$

3 – مقدر بيز (1)

يستند اسلوب بيز على فكرة التعامل مع المعلمات كمتغيرات عشوائية لها توزيع احتمالية تحدد من الخبرة السابقه والبيانات المتاحه ، ويسمى هذا التوزيع الاولـــي (prior Distribution)، واذا اعتبرنا ان g(θ) هو التوزيـــع الاولـــي للمعلمـــة θ فـــان التوزيـــع اللاحـــق h (θ|t) (posterior distribution) ، ومن خلاله يتم الحصول على مقدار بيز باستخدام دوال خسارة معروفة مثل دالـــة الخسارة التربيعية ، او دالة الخسارة من نوع العتبة المطلقة او باعتماد صيغة جفري العامة (Jeffrey 's formula) ، وعليه سنفترض أن:

$$g(\theta)\ \alpha\ \sqrt{In\ (\theta)}$$ ، k ثابت التناسب

$$g(\theta) = K\ \sqrt{In\ (\theta)}$$

In (θ) هي معلومات فشر Fisher information

$$g(\theta) = K\ \sqrt{\frac{-E\,\partial^2 LnL}{\partial\theta^2}}$$

وبأخذ المشتقة الثانيه للمعادلة (11) نحصل على :-

$$\frac{\partial^2 LnL}{\partial\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2\theta\sum_{i=1}^{n} ti^2}{\theta^2}$$

وعليه

$$E\ \frac{\partial^2 LnL}{\partial\theta^2} = \frac{n\theta - 2nE\ (T^2)}{\theta^3}$$

بما ان

$$-E\ \frac{\partial^2 LnL}{\partial\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$$

فان التوزيع الاولي للمعلمة θ هو

$$g(\theta) = \begin{cases} K\,\dfrac{\sqrt{n}}{\theta} & \theta > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad .... (15)$$

ولكي نستخرج التوزيع اللاحق للمعلمة θ بوجود معلومات العينة ($t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n$) ، نعتمد على قاعدة بيز القياسية والمتمثلة بدمج دالة الكثافة الاولية مع دالة الامكان وكما يلي :

$$f(t_1, t_2, \ldots\ldots t_n, \theta) = \frac{2^n}{\theta^n}(\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} ti)\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} ti^2}{\theta}}\ .\ g(\theta)$$

$$f(t_2, t_2, \ldots\ldots, t_n, \theta) = 2^n\, K\sqrt{n}\, (\frac{1}{\theta})^{n+1}\, \underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} ti\ e^{-\frac{\sum ti^2}{\theta}} \qquad I_{(0,\infty)}(t)$$

ثم نكامل هذه الدالة بالنسبه لـــ θ للحصول على التوزيع الحدي $f(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n)$
وبعد اجراء التكامل وجد ان

$$f(t_1, t_2, \ldots. t_n) = \begin{cases} 2^n\, K\sqrt{n}\, (\underset{i=1}{\overset{n}{\pi}} t_i)\dfrac{\Gamma(n)}{(\sum_{i=1}^{n} ti^2)^n} & ,\quad t > 0 \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad .....(16)$$

وبما ان التوزيع اللاحق

$$h(\theta, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{f(t_1, t_2, \dots, t_n, \theta)}{f(t_1, t_2, \dots, t_n)}$$

فان الصيغة الثابته $h(\theta \mid t)$ هي :

$$h(\theta \mid t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)^n}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n+1} e^{-\frac{\sum t_i^2}{\theta}}, & \theta > 0 \quad \dots\dots (17) \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

وحيث ان مقدر بيز للمعلمية θ هو المقدر الذي يملك اقل خطورة بيزيه وطبقا لدالة الخسارة التربيعيه

$$L(\hat{\theta}, \theta) = c(\hat{\theta} - \theta)^2$$

فان المخاطرة هي

$$Risk = E\left[L(\hat{\theta}, \theta)\right]$$

$$= \int_0^\infty c(\hat{\theta}, \theta)^2 h(\theta \mid t_1, t_2, \dots, t_n)\, d\theta$$

$$= c\left[\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta} E(\theta \mid t) + E(\hat{\theta} \mid t)\right]$$

$$\frac{\partial Risk}{\partial \hat{\theta}} = c\left[2\hat{\theta} - 2E(\theta \mid t)\right]$$

$$\frac{\partial Risk}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \hat{\theta}_{SB} = \frac{\sum_{i=1}^{n} ti^2}{n-1} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (18)$$

وان مقدر دالة المعولية باستخدام التوزيع اللاحق

$$\hat{R}(t)_{SB} = ER(t) = \int_0^\infty R(t)\, h(\theta \mid t)\, d\theta$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} ti^2\right)^2}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n+1} e^{-\frac{t^2 + \sum ti^2}{\theta}}\, d\theta$$

ولنفرض :-

$$y = \frac{t^2 + \sum_{i=1}^{n} ti^2}{\theta}$$

$$\theta = \frac{t^2 + \sum_{i=1}^{n} ti^2}{y}$$

$$|j| = \left|\frac{d\theta}{dy}\right| = \left|-\frac{t^2 + \sum ti^2}{y^2}\right|$$

$$d\theta = \frac{t^2 + \sum_{i=1}^{n} ti^2}{y^2} \quad dy$$

وبتعويض هذه التحويلات واجراء التكامل

$$\hat{R}(t)_{SB} = \left[\frac{t^2 + \sum_{i=1}^{n} ti^2}{\sum_{i=1}^{n} ti^2}\right]^{-n} \quad .... \quad (19)$$

$$\hat{R}(t)_{SB} = \left[1 + \frac{t^2}{\sum_{i=1}^{n} ti^2}\right]^{-n}$$

وهو مقدر بيز القياسي لدالة المعولية لتوزيع رالي .

ب -تقدير معلمة ومعولية توزيع رالي من عينات تحت المراقبة [3,4]

سوف نتناول تقدير معلمة ومجهولية توزيع رالي(4) لعينه تسمى عينة الوقت تحت المراقبة (Time – censored sample) والمقصود بها اختبار n من الوحدات وانتهاء التجربة عند زمن محدد مسبقا هو (t_o) ، وهذا النوع من التجارب هو أساس تجارب اختبار الحياة وان تكلفة هذه التجارب تتزايد بدرجة كبيرة مع الزمن وتحتوي بيانات الوقت تحت المراقبة على أوقات الحياة الوحدات التي فشلت قبل زمن (t_o) وهي $\left(t_{(1)} < t_{(2)} < t_{(3)} \ldots\ldots < t_{(m)}\right)$ وبافتراض ان m من الوحدات فشلت قبل الزمن (t_o) وان (n-m) من الوحدات تبقى بعد الزمن (t_o) ويكون وقت انتهاء التجربة (t_o) ثابتا في حين عدد الوحدات التي فشلت قبل الزمن (t_o) يكون متغيرا عشوائيا باحتمال $p(t_o)$ ، وهو احتمال الفشل قبل الزمن (t_o) حينها يكون للمتغير M توزيع ذي الحدين

$$\Pr(M = m) = \begin{cases} C_m^n \, p^m (1-p)^{n-m} & , \quad m = 0,1,2,\ldots\ldots n \\ 0 & o.w. \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

وحيث أن $P = P(t_o)$

ومنها

$$F(t_\circ) = pr\,(t \le t_o) = 1 - e^{-\frac{t_o^2}{\theta}}$$

$$\therefore p = 1 - e^{-\frac{t_o^2}{\theta}}$$

$$e^{-\frac{t_o^2}{\theta}} = 1 - p$$

$$p(M = m) = C_m^n (1 - e^{-\frac{t_o^2}{\theta}})^m \, (e^{-\frac{t_o^2}{\theta}})^{n-m} \quad , m = 0,1,\ldots n \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

وحيث ان بيانات المراقبة من النوع الاول تتطلب ايجاد التوزيع $f\,(t \mid t \le t_o)$ والمعرف

$$f(t \mid t \le t_0) = \frac{f(t,\theta)}{F(t_0)}$$

$$f\,(t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots\ldots t_{(m)} \mid t \le t_o) = \frac{\prod_{i=1}^{m} f\,(t_{(i)}, \theta)}{(F\,(t_0))^m}$$

وبالنسبة لتوزيع رالي يكون

$$f\,(t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots\ldots t_{(m)} \mid t \le t_o) = \frac{\dfrac{m!\,2^m}{\theta^m}{}^m \left(\prod_{i=1}^{m} t_{(i)}\right) e^{-\frac{\sum_{i=1}^{m} t_i^2}{\theta}}}{\left(1 - e^{-\frac{t_0^2}{\theta}}\right)^m} \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

وان دالة الامكان ستكون

$$L = f(t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots\ldots\ldots t_{(m)} \mid t \le t_0, m) = f(t_{(1)}, \ldots\ldots\ldots t_{(m)} \mid t \le t_0)\, p(M = m)$$

وبتعويض دوال التوزيعات المعرفة تكون

$$L=\frac{n!2^m}{(n-m)!\theta^m}\left[\underset{i=1}{\overset{m}{\pi}}t_{(i)}\right]e^{-\frac{\left[\sum_{i=1}^{m}t_{(i)}{}^2+(n-m)t_o\right]}{\theta}}$$

$$1nL=1n\frac{n!}{(n-m)!}+m1n2-m1n\theta+\sum_{i=1}^{m}1n\,t_{(i)}-\frac{\sum_{i=1}^{m}t_{(i)}{}^2+(n-m)t_o{}^2}{\theta}$$

$$\frac{\partial 1nL}{\partial \upsilon}=\frac{-m}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{m}t_{(i)}{}^2+(n-m)t_o{}^2}{\hat{\theta}^2}=0$$

$$\hat{\theta}\,ML_{cen}=\frac{\sum_{i=1}^{m}t_{(i)}{}^2+(n-m)t_o{}^2}{m}\quad,\quad m>0\qquad \text{..........}\ .\qquad (23)$$

وباستخدام خاصية الثبات لمقدر الامكان الاعظم ليكون مقدر الدالة المعولية لتوزيع بيانات المعولية .

$$\hat{R}(t)_{MLcen}=e^{-\frac{mt^2}{\left[\sum_{i=1}^{m}ti^2+(n-m)t_o{}^2\right]}}\qquad \text{.........}\qquad (24)$$

مقدر بيز القياسي في حالة بيانات المراقبة(2) Standard Buyers Method (SBCen)

نعتمد على الدالة المشتركة من معلومات العتبة والتوزيع الاولي

$$f(t_{(1)},t_{(2)},\ldots,t_{(m)}\,\theta)=\frac{n!}{(n-m)!}2^m k\sqrt{n}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{m+1}\left[\underset{i=1}{\overset{m}{\pi}}t_{(i)}\right]e^{\frac{-\sum_{i=1}^{m}t_{(i)}{}^2+(n-m)t_o{}^2}{\theta}}$$

وعند تكامل هذه الدالة المشتركة بالنسبه لθ نحصل على

$f(t_{(1)},t_{(2)},\ldots\ldots\ldots t_{(m)})$ المعرفة

$$f=(t_{(1)},t_{(2)},\ldots\ldots t_{(m)})=\frac{n!}{(n-m)!}2^m\,k\sqrt{n}\left(\underset{i=1}{\overset{m}{\pi}}t_{(i)}\right)\frac{\Gamma(m)}{\left(\sum t_{(i)}{}^2+(n-m)t_0{}^2\right)^m}$$

ثم نوجد التوزيع اللاحق

$$h(\theta\,|\,t_{(1)},t_{(2)},\ldots\ldots t_{(m)})=\frac{f(t_{(1)},t_{(2)},\ldots\ldots t_{(m)}\,\theta)}{f(t_{(1)},t_{(2)},\ldots\ldots t_{(m)})}$$

$$h(\theta\,|\,t\ \ )=\frac{\left(\sum_{i=1}^{m}t_{(i)}{}^2+(n-m)t_0^2\right)^m}{\Gamma(m)}\left(\frac{1}{\theta}\right)^{m+1}e^{-\left(\frac{\sum_{i=1}^{m}t_{(i)}{}^2+(n-m)t_0^2}{\theta}\right)}$$

وباستخدام دالة خسارة تربيعية فان مقدر بيز للمعلمة θ هو المتوسط الشرطي للتوزيع اللاحق والـــذي يساوي

$$\hat{\theta}_{SB\ (cen)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} t_{(i)}^{\ 2} + (n - m)\, t_0^2}{m - 1} \qquad \ldots\ldots.. \qquad (25)$$

ومنه يكون مقدر بيز لدالة المعولية لتوزيع رالي في حالة بيانات المراقبة من النوع الاول هو :

$$\hat{R}(t)_{SBcen} = \left(1 + \frac{t^2}{\sum_{i=1}^{m} t_{(i)}^2 + (n-m)\, t_0^2}\right)^{-m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ \ldots(26)$$

الجانب التجريبي (المحاكاة) :

المحاكاة هي عملية تمثيل أو تقليل للواقع باستخدام نماذج معينة أي أنها إعطاء صورة بديلـــة لنظام من دون إعطاء صورة ذلك النظام والذي هو عبارة عن علاقة رالية تشمل مجموعة من الأجزاء التي تسمى مكونات النظام وسوف تستخدم المحاكاة لتوليد بيانات تامة وبيانات مراقبـــة مـــن النـــوع الأول، تتوزع توزيع رالي ذو معلمة واحدة ، الهدف من التوليد هو مقارنة طرائق تقدير معلمة القياس ودالة المعولية ، حيث ستتم المقارنة بين مقدر الإمكان الأعظم والعزوم ومقدر بيز القياسي للمعلمة وللمعولية ، في حالة البيانات التامة والمقارنة بين مقدري الإمكان الأعظم وبيز القياسي أيضا للمعلمة θ ولدالة المعولية R(t) في حالة بيانات المراقبة من النوع الأول ، وسيتم اختيار ثلاثة قيم افتراضـــية للمعلمة θ هي (θ = 0.8 , 1.3, 1.8) وأربع حجوم لقيم العينة هـــي (n = 10.25, 50 , 100) وكررت كل تجربة Rp = 500 كذلك أخذت ثلاث قيم للزمن لتقدير دالة المعولية t = 1 , 1.5 , 2 وسوف يتم المقارنة بين مقدرات المعلمة θ ودالة معولية توزيع رالي باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE) (Mean Squared Error)

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^{R_p} (\hat{\theta} i - \theta)^2}{R_p}$$

$$MSE(\hat{R}) = \frac{\sum_{i=1}^{R_p} (\hat{R} i - R)^2}{R_p}$$

والجدول التالي (جدول رقم (1))يعرض نتائج المحاكاة حسب طرائق التقـــدير (ML, MO , SB) للمعلمة θ

جدول رقم (1)

قيم (MSE) لمقدر معلمة القياس بالطرق الثلاث في حالة البيانات التامة

θ	n	ML	MO	SB	Best
0.8	10	0.023608	0.02793	0.031391	3'r'd
	25	0.016015	0.011732	0.011938	2'nd
	50	0.0056786	0.005485	0.0054333	3r'd
	100	0.0024392	0.006802	0.00250157	1s't
1.3	10	0.094433	0.10677	0.125564	1 st
	25	0.032406	0.04695	0.04722125	1 st
	50	0.020314	0.022034	0.0217314	1 st
	100	0.009775	0.10722	0.0100675	1 st
1.8	10	0.01235	0.24237	0.282522	1 st
	25	0.0954132	0.10636	0.107403	1 st
	50	0.0457073	0.049675	0.048965	1 st
	100	0.021953	0.024123	0.023132	1 st

ويتضح من الجدول رقم (1) إن قيم (MSE) ولكافة قيم θ ولجميع حجوم العينات كانــت هي الأفضل في حالة MLE عندما (θ =1.3 ،1.8)

وكذلك نوجد قيم (MSE) لمقدر المعولية بطريقة ML وطريقة SB كما في الجدول التالي

جدول رقم (2) قيم (MSE) لمقدر دالة المعولية بطريقة ML , SB لبيانات تامة

θ	n	t	ML	SB	Best
0.8	10	1	0.0059184	0.004461	SB
		1.5	0.0035403	0.0008735	SB
		2	0.00005998	0.00004423	SB
	25	1	0.0001378	0.0029865	ML
		1.5	0.00013193	0.0002323	ML
		2	0.0014312	0.00004609	ML
	50	1	0.000062259	0.00147033	ML
		1.5	0.000040239	0.00008602	ML
		2	0.00070097	0.00000943	SB
	100	1	0.00070096	0.0007059	ML
		1.5	0.00002581	0.00003092	ML
		2	0.000001133	0.000001969	ML
1.3	10	1	0.012817	0.01147	SB
		1.5	0.004565	0.005464	ML
		2	0.0006332	0.00133414	SB
	25	1	0.005728	0.0054649	SB
		1.5	0.0021035	0.0023906	ML
		2	0.00026486	0.0003995	ML
	50	1	0.0026744	0.0026287	SB
		1.5	0.00110701	0.0011623	SB
		2	0.0001249	0.00159663	ML
	100	1	0.00133084	0.0013113	SB
		1.5	0.000537311	0.00054621	SB
		2	0.0005381	0.00006156	SB

تابع جدول رقم (2)

θ	n	to	ML	SB	Best
1.8	10	1	0.0126317	0.0111413	SB
		1.5	0.0094244	0.0090204	SB
		2	0.0029007	0.003929	SB
	25	1	0.005272	0.0050208	SB
		1.5	0.00446939	0.004422	SB
		2	0.0017808	0.0016049	SB
	50	1	0.00236131	0.00231053	SB
		1.5	0.0021822	0.0021722	SB
		2	0.0006969	0.0007544	SB
	100	1	0.001219	0.001167	SB
		1.5	0.0010818	0.0010736	SB
		2	0.000328	0.0003457	SB

والجدول رقم (3) يوضح قيم MSE لمقدر معلمة القياس θ بطريقتي (ML, SB) لبيانات المراقبة من النوع الأول

θ	n	to	ML	SB	Best
0.8	10	1.5	0.033557	0.055624	ML
		2.5	0.023742	0.031627	ML
		3.5	0.023704	0.0313909	ML
	25	1.5	0.0129997	0.015587	ML
		2.5	0.0106608	0.011994	ML
		3.5	0.01060146	0.0119278	ML
	50	1.5	0.0058404	0.006477	ML
		2.5	0.0050677	0.005438	ML
		3.5	0.0050786	0.00543328	ML
	100	1.5	0.00286022	0.0029904	ML
		2.5	0.00244132	0.0025018	ML
		3.5	0.0024412	0.00250147	ML
1.3	10	1.5	0.33059	0.10338	ML
		2.5	0.110113	0.140556	ML
		3.5	0.09443	0.12668	ML
	25	1.5	0.08799	0.124035	ML
		2.5	0.04323	0.0493701	ML
		3.5	0.03499	0.0471125	ML
	50	1.5	0.034999	0.021993	ML
		2.5	0.020442	0.021993	ML
		3.5	0.020318	0.021737	ML
	100	1.5	0.017042	0.0184249	ML
		2.5	0.009967	0.010253	ML
		3.5	0.009769	0.0100053	ML

تابع جدول رقم (3)

θ	n	to	ML	SB	Best
1.8	10	1.5	0.809928	0.99658	ML
		2.5	0.26288	0.95074	ML
		3.5	0.213993	0.61057	ML
	25	1.5	0.33773	0.42084	ML
		2.5	0.10555	0.108193	ML
		3.5	0.960503	0.98067	ML
	50	1.5	0.110187	0.14011	ML
		2.5	0.048243	0.05266	ML
		3.5	0.04577	0.048095	ML
	100	1.5	0.0509017	0.571677	ML
		2.5	0.023833	0.02472922	ML
		3.5	0.021975	0.0254164	ML

ظهر من جدول رقم (3) إن مقدر الإمكان الأعظم افضل من مقدر بيز لمعلمة القياس لتوزيع رالي في حالة بيانات مراقبة من النوع الأول وبنسبة 100 % .

ويوضح جدول رقم (4) قيم(MES) لمقدر دالة المعولية بطريقتـــي (SB , ML) فـــي حالة بيانات المراقبة من النوع الأول

جدول رقم (4)

قيم MSE لمقدر دالة المعولية بطريقتين (MLE , SB) لبيانات مراقبة من النوع الأول

θ	n	to	t	ML	SB	Best
0.8	10	1.5	1	0.007865	0.009363	ML
			1.5	0.0007359	0.001826	ML
			2	0.00002756	0.0001703	ML
		2.5	1	0.0059468	0.006499	ML
			1.5	0.000359416	0.00088307	ML
			2	0.00000620740	0.00004499	ML
		3.5	1	0.0059184	0.0064605	ML
			1.5	0.0003546	0.00087364	ML
			2	0.00005948	0.000044019	SB
	25	1.5	1	0.00341877	0.003748	ML
			1.5	0.0001990189	0.00036195	ML
			2	0.000026693	0.0000103194	SB
		2.5	1	0.002880305	0.0030017	ML
			1.5	0.00013938	0.00023362	ML
			2	0.0000013507	0.000004748	ML
		3.5	1	0.0028675	0.0029865	ML
			1.5	0.0001389	0.000231173	ML
			2	0.0000013199	0.0000046093	ML
	50	1.5	1	0.0016425	0.00173004	ML
			1.5	0.000075036	0.000112035	ML
			2	0.0000050603	0.0000014145	SB
		2.5	1	0.0014358	0.00147033	ML
			1.5	0.000061786	0.000086007	ML
			2	0.00000393	0.0000086195	ML
		3.5	1	0.0014309	0.00146843	ML
			1.5	0.000062205	0.00008567	ML
			2	0.000004023	0.000009319	ML
	100	1.5	1	0.0008195	0.000836502	ML
			1.5	0.00003207	0.00004025	ML
			2	0.000001548	0.0000040259	ML
		2.5	1	0.00081954	0.00070494	SB
			1.5	0.0000258122	0.000030929	ML
			2	0.0000001148	0.0000001973	ML
		3.5	1	0.00070095	0.0008904	ML
			1.5	0.000025806	0.000010925	SB
			2	0.0000011326	0.0000019699	ML
1.3	10	1.5	1	0.020297	0.019506	SB
			1.5	0.0113140	0.01554134	ML
			2	0.003493	0.007296	ML

تابع جدول رقم (4)

		2.5	1	0.013179	0.0118218	SB
			1.5	0.0048735	0.0058722	ML
			2	0.0007253	0.0015409	ML
		3.5	1	0.0128172	0.0113729	SB
			1.5	0.004565	0.0053845	ML
			2	0.000633165	0.00133414	ML
	25	1.5	1	0.008943	0.0088564	SB
			1.5	0.0043618	0.0052948	ML
			2	0.00082138	0.0014321	ML
		2.5	1	0.0057690	0.00551936	SB
			1.5	0.0022543	0.0024633	ML
			2	0.0002744	0.0042157	ML
		3.5	1	0.0057217	0.00545786	SB
			1.5	0.0022094	0.00238806	ML
			2	0.0026378	0.0036780	ML
	50	1.5	1	0.004287305	0.0042667	SB
			1.5	0.0018875	0.00213004	ML
			2	0.002435	0.004738	ML
		2.5	1	0.00269084	0.00026389	SB
			1.5	0.0011144	0.001174836	ML
			2	0.000124638	0.000162644	ML
		3.5	1	0.002647	0.01161389	SB
			1.5	0.0011078	0.0015987	ML
			2	0.00012394	0.0020247	ML
1.3	100	1.5	1	0.0022325	0.002024	SB
			1.5	0.0009396	0.0009998	ML
			2	0.00010489	0.0001345	ML
		2.5	1	0.00135274	0.00133593	SB
			1.5	0.0005498	0.0005594	ML
			2	0.00005659	0.00009639	ML
		3.5	1	0.00133788	0.00132244	SB
			1.5	0.00053733	0.00054586	ML
			2	0.00005374	0.0000614922	ML
1.8	10	1.5	1	0.022301	0.020607	SB
			1.5	0.0217007	0.0251879	ML
			2	0.011048	0.0191964	ML
		2.5	1	0.013391	0.0119768	SB
			1.5	0.010598	0.0105319	SB
			2	0.003664	0.0051650	ML
		3.5	1	0.012638	0.0111607	SB
			1.5	0.009459	0.0090580	ML
			2	0.002938	0.0039575	ML
1.8	25	1.5	1	0.010044	0.009779	SB
			1.5	0.010249	0.01120475	ML
			2	0.0046697	0.00659823	ML

تابع جدول رقم (4)

		2.5	1	0.00055065	0.0052877	SB
			1.5	0.0048023	0.00482205	ML
			2	0.0015967	0.00198706	ML
		3.5	1	0.0053764	0.00550368	SB
			1.5	0.00449023	0.00441560	SB
			2	0.00139193	0.00161678	ML
1.8	50	1.5	1	0.0049481	0.00488723	SB
			1.5	0.0047828	0.00505675	ML
			2	0.0017265	0.00219973	ML
		2.5	1	0.0024586	0.002413074	SB
			1.5	0.00228923	0.00230852	ML
			2	0.000733714	0.002302862	ML
		3.5	1	0.00236246	0.002311911	SB
			1.5	0.00218183	0.002173325	SB
			2	0.000690280	0.000754461	ML
1.8	100	1.5	1	0.00243403	0.00241705	SB
			1.5	0.00235421	0.00241832	ML
			2	0.00079282	0.00090813	ML
		2.5	1	0.00125059	0.001236055	SB
			1.5	0.001165183	0.00116253	SB
			2	0.000359717	0.00037859	ML
		3.5	1	0.00117393	0.00115636	SB
			1.5	0.00108284	0.00107342	SB
			2	0.00032916	0.00034165	ML

يتضح من جدول رقم (4) إن MSE لمقدر الإمكان لدالة المعولية في حالة البيانات المبتورة أفضل من مقدر بيز القياسي وكانت نسبة التفضيل لمقدر ML هي 73% بينما النسبة لمقدر بيز هـــي 27 %

Abstract :

This work focused on the comparison between some well known methods of estimation (classical and Bayesian) for scale parameter , and Reliability function of Raylieh distribution , which is considered one of the failure models . The methodology of this work depends on theoretical study , classical method and Bayesian estimation and also depends on experimental study by designing number of simulation experiments using various values of parameters and sample sizes .Two kinds of data are used

1. Complete Data
2. Time censored Data .

All the comparisons between method of estimate and the estimator of Reliability are verified and arranged in tables depending on the Mean Square Error (MSE) as a measure of Comparison of preference between methods

الاستنتاجات :

من خلال ما تقدم وجد أن :.

1. تفوقت طريقة الإمكان الأعظم على طريقة بيز في حالة البيانات المبتورة عند مقارنة قيم (MSE) لمقدر المعولية حيث كانت نسبة تفضيلها 73% كما هو موضح في الجدول رقم (4)
2. كذلك ظهر مقدر الإمكان الأعظم لمعلمة القياس أفضلية على مقدر بيز وبنسبة 100% للبيانات المبتورة .
3. كذلك تفوقت مقدرات الإمكان الأعظم على مقدري العزوم و بيز القياسي في حالة البيانات التامة من خلال مقارنة MSE سواء لمقدر معلمة القياس آو مقدر دالة المعولية كما هو واضح في الجدول رقم (1) والجدول رقم (2)

التوصيات :

1. نوصي بتعميم نتائج البحث لتشمل توزيع رالي ذو المعلمتين .
2. نوصي بتوسيع البحث ليشمل بيانات مراقبة من النوع الثاني وتطوير صيغ بيز الموجودة إلى صيغ اخرى تأخذ دوال خسارة مختلفة .

References : **المصادر :**

1. Afify , E.E. (2004)" Comparison of Estimators of parameters for Rayleigh Distribution, " Faculty of Eng. Shibeen Elkom Menoufia university
2. Singh H.p& others (2000) "Estimation of weiball shape parameter by shrinkage Towards An interval under failure censored Sampling, " MSE : 62E17
3. صالح، مكي أكرم محمد (2006) " محاكاة طرائق تقدير معلمة القياس ودالة المعولية لتوزيع ويبل ذي المعلمتين " أطروحة دكتوراه – كلية التربية الجامعة المستنصرية .
4. صالح ، ستار محمد (2006) " مقارنة أسلوب بيز مع طرائق اخرى لتقدير دالة المعولية لتوزيع باريتو من النوع الأول " ،رسالة ماجستير كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة بغداد
5. Lawless , J . F , " statistical models and methods for life time Data " John Wiley , 2003