مقارنة لحل مسائل البرمجة الكسرية بطريقة مكملات المتغيرات المهملة والطريقة التكميلية

ا.م.عباس احمد حسن
م.رشا جلال متلف
م.م.فاطمة احمد صادق
الجامعة التكنلوجية/قسم العلوم التطبيقية- فرع الرياضيات

الخلاصة

هدف البحث هو تقديم طريقة لحل مسائل البرمجة الكسرية باستخدام مكملات المتغيرات المهملة ومقارنة الحل مع الطريقة التكميلية للوصول الى الحل الامثل الشامل.

1-المقدمة

مسائل البرمجة الكسرية اخذت قدراً كبيراً من البحث والاهتمام، واقترحت عدة طرق لحل هذه المسائل فمنذ عام 1962 اقترح charnes, kooper طريقة لحل مسائل البرمجة الكسرية بتحويلها الى مسائل برمجة خطية [4]،[5]، وفي سنة 1973 استخدم Bit طريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية وفي سنة 1981,1976 درست كذلك من قبل Bit، Magnant، [1]، [2].

سيشان(seshan) وباحثين اخرين عرضوا نوع مختلف من المسائل المقابلة لمسائل اولية تتضمن تعظيم او تصغير لدالة هدف كسرية مع قيود خطية حيث هم وحدهم عرفوا المسألة المقابلة والاولية كدالة هدف كسرية تتضمن اجزاء غير موجودة في بسط ومقام دالة الهدف الاصلية[3]، وسنوضح تفاصيل ذلك لاحقاً.

يتضمن بحثنا جانبين جانب نظري يتناول شرح خوارزمية الحل بالطريقة التكميلية وطريقة مكملات المتغيرات المهملة ثم جانب تطبيقي يتناول حل مجموعة من مسائل البرمجة الكسرية.

2- الجانب النظري

سنتناول في الجانب النظري طريقتين الاولى هي الطريقة التكميلية والثانية طريق مكملات المتغيرات المهملة كالاتي.

1.2- الطريقة التكميلية لحل مسائل البرمجة الكسرية

خوارزمية الحل بالطريقة التكميلية

يمكننا ان نعبر عن مسائل البرمجة الكسرية بالانموذج الرياضي[6] الاتي:

$$\max z(x)=\frac{c'x+\alpha}{d'x+\beta} \qquad \ldots(1.2)$$

s.to

$$Ax \le b \qquad \cdots(2.2)$$

$$x \ge 0$$

حيث $d'x+\beta>0$

$\forall x=(x_1,\cdots,x_n)'$

Aمصفوفة ذات ابعاد $m\times n$

$x,c,d\in R^n, b\in R^m, \alpha,\beta\in R$

خوارزمية الحل ستكون كالاتي

1- يصمم جدول الحل (الجدول الاول في الطريقة المبسطة) بحيث يحتوي السطر الاول منه على قيم Z_e والتي تمثل معاملات دالة الهدف الجديدة والتي تحسب من القانون الاتي

$$Z_e=z_2c'-z_1d' \qquad \cdots(3.2)$$

حيث z_1, z_2 تمثلان قيمة معادلة البسط والمقام على التوالي بعد التعويض عن قيم x الناتجة و c, d تمثلان معاملات دالة هدف البسط والمقام على التوالي.

2- تحتوي سطور الجدول من السطر الثاني الى السطر $m+1$ على المتغيرات المهملة $.(s_1,s_2,\cdots,s_m)$

3- السطر $m+2, m+3$ يمثل قيم c, d مضروبة باشارة سالبة.

4- نطبق الطريقة المبسطة على هذا الجدول، وهناك حالتان يكون الاختلاف فيهما في استخدام دالة الهدف Z_e حيث ستكون الحالتان كالاتي:

الحالة الاولى: استخراج Z_e مرة واحدة من القانون(3.2) اعلاه ووضعها في الجدول والاستمرار بالحل الى حين الوصول الى الحل الامثل والذي سيكون حلاً محلياً وقد يكون احياناً شاملاً لكن ليس بشكل عام.

الحالة الثانية: استخراج دالة الهدف Z_e وفق القانون(3.2) ووضعها في بداية الجدول اما بقية ارقام الجدول فسيتم استخراجها وفق الخوارزمية السابقة بعد ذلك نطبق اسلوب الطريقة المبسطة على الجدول الاول لتتكون قيم الجدول الثاني باستثناء دالة الهدف Z_e التي تستخرج مرة اخرى وفق القانون(3.2) وهكذا نستمرباستخراج الجدول اللاحق بنفس الاسلوب لحين الوصول الى الحل الامثل والذي سيكون حلاً شاملاً في هذه الحالة.

لتوضيح ذلك سنتناول مجموعة من الامثلة مطبقين كلا الحالتين

مثال (1.2)

$$\text{Max } Z(x) = \frac{5x_1 + 3x_2}{5x_1 + 2x_2 + 1} \qquad \cdots(1.1.2)$$

s.to

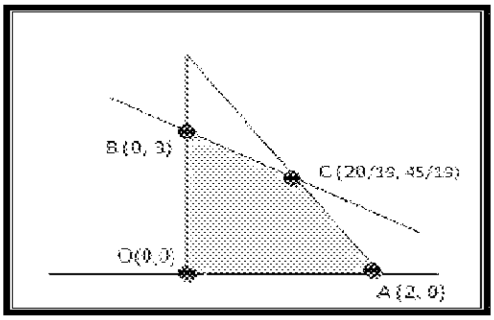
$$3x_1 + 5x_2 \le 15 \qquad \cdots(2.1.2)$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 10 \qquad \cdots(3.1.2)$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

ويمكن تمثيل القيود في الشكل (1.2)

الشكل(1.2)



والحلول المسموح بها كما مبينة في الجدول (1.2) المبين ادناه

الجدول(1.2)

النقطة	Z
O(0,0)	0
A(2,0)	0.9
B(0,3)*	9/7=1.28*
C(20/19,45/19)	1.12

حيث ان النقطة $B(0,3)$ تمثل الحل الامثل الشامل، حل المثال (1.2) وفق الحالة الاولى كالاتي:

الحالة الاولى(اي باستخراج Z_e مرة واحدة)

لو فرضنا قيم x كحل اولي هي $x_1 = 0, x_2 = 0$

فأن قيم البسط والمقام ستكون $z_1 = 0, z_2 = 1$

ولدينا $c' = (5,3), d' = (5,2)$

$$\because Z_e = z_2 c' - z_1 d'$$
$$= 1 \times (5,3) - 0 \times (5,2)$$
$$\therefore Z_e = (5,3)$$
$$\therefore Z_e - (5,3) = 0$$

وبعد اضافة المتغيرات المهملة S_1, S_2 الى القيود (2.1.2) و(3.1.2) سيكون لدينا

$$3x_1 + 5x_2 + s_1 = 15$$
$$5x_1 + 2x_2 + s_2 = 10$$

يوضع Z_e مع معاملات القيود في الجدول الاول سيكون لدينا

جدول(1.1.2)

Basic	v	X_1	X_2	S_1	S_2
Max Z_e	0	-5	-3	0	0
S_1	15	3	5	1	0
S_2	10	5	2	0	1

بتحديد المتغير الداخل X_1 والمتغير الخارج S_2 وباستخدام خوارزمية الحل للطريقة المبسطة سنحصل على الجدول الاتي.

جدول(2.1.2)

Basic	v	X_1	X_2	S_1	S_2
Max Z_e	10	0	-1	0	1
S_1	9	0	19/5	1	-3/5
X_1	2	1	2/5	0	1/5

وبتحديد المتغير الداخل X_2 والخارج S_1 وبالاستمرار بالحل سنحصل على الجدول الاتي.

جدول(3.1.2)

Basic	v	X_1	X_2	S_1	S_2
Max Z_e	235/19	0	0	5/19	10/19
X_2	45/19	0	1	5/19	-3/19
X_1	20/19	1	0	-2/19	5/19

حيث $x_1 = 45/19, x_2 = 20/19$, Z=1.12 وهذا هو الحل الامثل

وعند مقارنة الحل اعلاه مع الجدول(1.2) نجد ان الحل هو حل محلي وليس شامل لان الحل الشامل (اعلى) هو Z=1. 28 حيث $x_1 = 0, x_2 = 3$

لقد تم حل المثال يدوياً ويمكن حله باستخدام البرنامج الجاهز QSB حيث سنتوصل الى نفس النتائج.

الحالة الثانية(استخراج Z_e في كل جدول)

لو تم حل المثال السابق باستخدام الحالة الاولى وفرضنا في البداية ان قيم x كحل اولي هي $x_1 = 0, x_2 = 0$ فأن قيم البسط والمقام ستكون $z_1 = 0, z_2 = 1$

ولدينا $c' = (5,3), d' = (5,2)$

$$\because Z_e = z_2 c' - z_1 d'$$
$$= 1 \times (5,3) - 0 \times (5,2)$$
$$\therefore Z_e = (5,3)$$
$$\therefore Z_e - (5,3) = 0$$

يوضع Z_e مع معاملات القيود وقيم c, d في جدول السمبلكس الاول سيكون لدين

جدول (1.2.1.2)

Basic	v	X_1	X_2	S_1	S_2
Max Z_e	0	-5	-3	0	0
S_1	15	3	5	1	0
S_2	10	5	2	0	1
C	0	-5	-3	0	0
d	0	-5	-2	0	0

بتحديد المتغير الداخل x_1 والمتغير الخارج S_2 وباستخدام خوارزمية الحل للطريقة المبسطة لايجاد ارقام الجدول الجديد باستثناء دالة الهدف Z_e والتي تستخرج من القانون(3.2)حيث يتم استخراج z_1, z_2 بعد تعويض قيم $x_1 = 2, x_2 = 0$ لذا فأن $z_1 = 10, z_2 = 11$ وبعد تعويض قيم c،d في الجدول (2.2.1.2) سيكون

$$\because Z_e = z_2 c' - z_1 d'$$
$$= 11 \times (10,0,-1,0,1) - 10 \times (10,0,0,0,1)$$
$$\therefore Z_e = (10,0,-11,0,1)$$

حيث سيكون الجدول الجديد كالاتي

جدول (2.2.1.2)

Basic	v	x_1	x_2	S_1	S_2
Max Z_e	10	0	-11	0	1
S_1	9	0	19/5	-1	-3/5
x_1	2	1	2/5	0	1/5
C	10	0	-1	0	1
d	10	0	0	0	1

وبتحديد المتغير الداخل x_2 والخارج S_1 وباستخراج قيمة Z_e والتي تستخرج مرة اخرى وفق القانون(3.2) حيث سيتم استخراج قيم z_1, z_2 بعد تعويض قيم $x_1 = 1.05, x_2 = 2.37$ في البسط والمقام سيكون لدينا $z_1 = 12.36842, z_2 = 11$ وبعد تعويض قيم c ، d في الجدول (3.2.1.2) سيكون

$$\because Z_e = z_2 c' - z_1 d'$$
$$= 11 \times (12.37,0,0,0.26,0.84) - 12.36842 \times (10,0,0,0,1)$$
$$\therefore Z_e = (12.37,0,0,2.89,-3.11)$$

نضع هذه القيمة في السطر الاول كدالة هدف في الجدول الجديد اما بقية ارقام الجدول الجديد فسيتم استخراجها باستخدام خوارزمية الطريقة المبسطة على جدول (2.2.1.2) وبذلك سيكون لدينا الجدول الجديد

جدول(3.2.1.2)

Basic	v	X_1	X_2	S_1	S_2
$\text{Max } Z_e$	12.37	0	0	2.89	-3.11
X_2	2.37	0	1	0.26	-0.16
X_1	1.05	1	0	-0.11	0.26
C	12.37	0	0	0.26	0.84
d	10	0	0	0	1

وبتحديد المتغير الداخل S_2 والخارج X_1 وباستخراج قيمة Z_e والتي تستخرج مرة اخرى وفق القانون(3.2) حيث سيتم استخراج قيم z_1, z_2 بعد تعويض قيم $x_1 = 0, x_2 = 3$ في البسط والمقام سيكون لدينا $z_1 = 9, z_2 = 7$ وبعد تعويض قيم c ، d في الجدول(4.2.1.2) سيكون

$$\because Z_e = z_2c' - z_1d'$$
$$= 7 \times (9,-3.2,0,0.6,0) - 9 \times (6,-3.8,0,0.4,0)$$
$$\therefore Z_e = (9,11.8,0,0.6,0)$$

توضع هذه القيمة في السطر الاول كدالة هدف في الجدول الجديد اما بقية ارقام الجدول فسيتم استخراجها باستخدام خوارزمية الطريقة المبسطة على جدول(3.3.1.2) وبذلك سيكون لدينا الجدول الجديد الاتي

جدول(4.2.1.2)

Basic	v	X_1	X_2	S_1	S_2
$\text{Max } Z_e$	9	11.8	0	0.60	0
X_2	3	0.60	1	0.20	0
S_2	4	3.8	0	0.4	1
C	9	-3.2	0	0. 60	0
d	6	-3.8	0	0.40	0

وهذا هو الحل الامثل حيث $x_2 = 3$ ، $x_1 = 0$ ، $Z = 9/7$

وعند مقارنة هذا الحل مع الجدول(1.2) نجد ان هذا الحل هو الحل الشامل، نستنتج من ذلك ان استخدام الحالة الثانية اي بتكرار دالة الهدف Z_e كل مرة توصلنا الى الحل الامثل الشامل.

2.2–استخدام مكملات المتغيرات المهملة لحل مسائل البرمجة الكسرية

ان حل اي مسألة اولية يتضمن متغيرات مهملة وان المسألة المقابلة للمسألة الاولية يتضمن متغيرات تقابل تلك المتغيرات المهملة ندعوها بمكملات المتغيرات المهملة وان نظرية سيشان تعطينا اسلوبا للاستعانة بهذه المكملات لايجاد الحل للمسألة المقابلة ثم للاولية [3] ويمكن توضيح ذلك كالاتي

نفرض المسألة الاولية(PP)الاتية

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } Z(x)=\dfrac{c'x+\alpha}{d'x+\beta} \\ \text{s.to} \\ Ax\le b \\ x\ge 0 \end{array}\right\} \cdots(\text{SePP})$$

بحيث $d'x+\beta>0$

$\forall x=(x_1,\cdots,x_n)'$

Aمصفوفة ذات ابعاد $m\times n$

$x,c,d\in R^n, b\in R^m, \alpha,\beta\in R$

أن سيشان (sechan) وضع المسألة المقابلة (SeDP) للمسألة السابقة (SEPP) كالاتي

$$\text{Min } g(u,v)=\frac{c'u+\alpha}{d'u+\beta} \quad \cdots(1.2.2)$$

s.to

$$\left.\begin{array}{ll} cd'u-dc'-Av\le \alpha d-\beta c & \cdots(2.2.2) \\ \alpha d'u-\beta c'u+b'v\le 0 & \cdots(3.2.2) \end{array}\right\}\cdots\text{seDp}$$

$$u,v\ge 0$$

فأذا كانتw,s هي المتغيرات المهملة (slack) او الفائضة(surples) للمسألة (sepp) والمسألة المقابلة (seDp) على التوالي وكانت حل المسألة الاولية (x,s) و(u,v,w) حل للمسألة المقابلة اذا تحققت الشروط الاتية

$$w'^{*}x^{*}+s^{*'}v^{*}=0$$

اي

$x_j^* w_j^* = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n$

$v_i^* s_i^* = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,m$

يحل النموذج (seDp) لمسألة البرمجة الخطية المقابلة مع قيود المسألة وباستخراج دالة الهدف g_e والتي تحسب من القانون :

$$g_e = g_2 c' - g_1 d' \qquad \cdots(4.2.2)$$

حيث g_1, g_2 تمثلان قيمة معادلة البسط والمقام على التوالي بعد التعويض عن قيم u الناتجة و c, d تمثلان معاملات دالة هدف البسط والمقام على التوالي.

وبأستخدام الطريقة المبسطة او بأستخدام البرنامج الجاهز QSB سيتم الوصول الى الحل الامثل والذي سيكون حلاً شاملاً .

وسنتناول الان استخدام طريقة مكملات المتغيرات المهملة لحل المثال السابق اي مثال (1.2)

كان لدينا في المثال (1.2) الاتي:

$$\text{Max } Z(x) = \frac{5x_1 + 3x_2}{5x_1 + 2x_2 + 1}$$

s.to

$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

ويعتبر هذا النموذج هو المسألة الاولية (sepp) حيث

$$c = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha = 0, d = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \beta = 1, A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

وكانت المسألة المقابلة (seDp) هي

$$\text{Min } g(u, v) = \frac{c'u + \alpha}{d'u + \beta}$$

s.to

$$cd'u - dc'u - A'v \le \alpha d - \beta c$$

$$\alpha d'u - \beta c'u + b'v \le 0$$

وبتعويض قيم c, d, α, β ستكون

$$\text{Min } g(u,v)=\frac{5u_1+3u_2}{5u_1+2u_2+1}$$

لو فرضنا الحل الاولي لقيم u هي $u_1=0, u_2=0$ سنحصل على $g_1=0, g_2=1$ لقيم بسط ومقام $g(u,v)$ على التوالي وفق المعادلة (4.2.2) لدينا

$$\because g_e = g_2c' - g_1d'$$
$$= 1\times(5,3) - 0\times(5,2)$$
$$\therefore g_e = (5,3)$$

لذا يمكن كتابة المسألة المقابلة (seDp) كالاتي :

$$\text{Min } g_e = 5u_1 + 3u_2$$
s.to
$$cd'u - dc'u - A'v \le \alpha d - \beta c \quad \cdots(2.2.2)$$
$$\alpha d'u - \beta c'u + b'v \le 0 \quad \cdots(3.2.2)$$

اذن من (2.2.2) سنحصل على

$$\therefore \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}(5\quad 2)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}(5\quad 3)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3&5\\5&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \le 0\times\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} - 1\times\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

وبالتبسيط سيكون لدينا

$$5u_2 + 3v_1 + 5v_2 \ge 5$$
$$-5u_1 + 5v_1 + 2v_2 \ge 3$$

وكذلك من (3.2.2) سنحصل على

$$0\times(5\quad 2)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} - 1\times(5\quad 3)\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} + (15\quad 10)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \le 0$$

وبالتبسيط سيكون لدينا

$$-5u_1 - 3u_2 + 15v_1 + 10v_2 \le 0$$
$$\therefore \text{Min } g_e = 5u_1 + 3u_2$$
s.to
$$5u_2 + 3v_1 + 5v_2 \ge 5$$
$$-5u_1 + 5v_1 + 2v_2 \ge 3$$
$$-5u_1 - 3u_2 + 15v_1 + 10v_2 \le 0$$

ويحل النموذج اعلاه بواسطة البرنامج الجاهز QSB نحصل على

$w^*_1 = 11.8, w^*_2 = 0, w^*_3 = 0, u^*_1 = 0, u^*_2 = 0, v^*_1 = 0.6, v^*_2 = 0$

$$\therefore g(u^*, v^*) = \frac{5\times 0 + 3\times 3}{5\times 0 + 2\times 3 + 1}$$
$$= 9/7$$

ان الحل يجب ان يحقق الشروط

$x^*_j w^*_j = 0 \qquad j = 1,2$

$v^*_i s^*_i = 0 \qquad i = 1,2$

$\because x^*_1 w^*_1 = 0 \qquad \because v^*_1 s^*_1 = 0$

$w^*_1 = 11.8 > 0 \Rightarrow x^*_1 = 0 \quad , \quad v^*_1 = 0.6 > 0 \Rightarrow s^*_1 = 0$

لو عدنا لقيود المسألة الاولية(sepp) نجد ان

$3x_1 + 5x_2 + s_1 = 15 \qquad 5x_1 + 2x_2 + s_2 = 10$

$\therefore x^*_2 = 3 \quad , \quad \therefore s^*_2 = 4$

$\because x^*_2 w^*_2 = 0 \qquad \because v^*_2 s^*_2 = 0$

$x^*_2 = 3 > 0 \Rightarrow w^*_2 = 0 \quad , \quad s^*_2 = 4 > 0 \Rightarrow v^*_2 = 0$

وبذلك تحقق جميع الشروط

$x^*_j w^*_j = 0$

$v^*_i s^*_i = 0$

لو عوضنا قيم x_1, x_2 ، $x_1 = 0, x_2 = 3$ بالمسألة sepp

$$\text{Max } Z(x) = \frac{5x_1 + 3x_2}{5x_1 + 2x_2 + 1}$$
$$= \frac{5\times 0 + 3\times 3}{5\times 0 + 2\times 3 + 1}$$
$$\therefore \text{Max } Z = 9/7$$

وهذا هو الحل الامثل الشامل وهو مطابق لحل المسألة(1.2) بالطريقة التكميلية عند استخراج دالة هدف جديدة في كل مرة.

لذا سنكتفي في الجانب التطبيقي استخدام طريقة سيشان اي طريقة مكملات المتغيرات المهملة لحل مسائل البرمجة الكسرية لان الحل بهذه الطريقة سيكون مطابق للحل الشامل المستخرج بالحالة الثانية للطريقة التكميلية.

3- <u>الجانب التطبيقي</u>

سنتناول في الجانب التطبيقي هذا حل مسألتين بطريقة سيشان دون الاسهاب بالتفاصيل الجانبية.

<u>مسألة1-</u>

$$\text{Max } Z(x) = \frac{5x_1 + 3x_2}{3x_1 + 2x_2 + 1}$$

s.to

$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$
$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

باستخدام (4.2.2)، (3.2.2)، (2.2.2) سنحصل على

$$\therefore \text{ Min } g_e = 5u_1 + 3u_2$$

s.to

$$-u_2 + 3v_1 + 2v_2 \ge 5$$
$$u_1 + 5v_1 + v_2 \ge 3$$
$$-5u_1 - 3u_2 + 15v_1 + 6v_2 \le 0$$

ويحل النموذج بواسطة البرنامج الجاهز QSB نحصل على

$$w^*_1 = 0, w^*_2 = 2.5\,,\,, u^*_1 = 3\,, u^*_2 = 0\,, v^*_1 = 0\,, v^*_2 = 2.5$$

$$\therefore g(u^*, v^*) = \frac{5\times 3 + 3\times 0}{3\times 3 + 2\times 0 + 1}$$
$$= 3/2$$

ان الحل يجب ان يحقق الشروط

$$x^*_j w^*_j = 0 \qquad j = 1,2$$
$$v^*_i s^*_i = 0 \qquad i = 1,2$$
$$\because x^*_2 w^*_2 = 0 \qquad\qquad \because v^*_2 s^*_2 = 0$$
$$w^*_2 = 2.5 > 0 \Rightarrow x^*_2 = 0 \quad , \quad v^*_2 = 2.5 > 0 \Rightarrow s^*_2 = 0$$

لو عدنا لقيود المسألة sepp

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 6 \qquad\qquad 3x_1 + 5x_2 + s_1 = 15$$
$$\therefore x^*_1 = 3 \qquad , \qquad \therefore s^*_1 = 6$$

$\because x_1^* w_1^* = 0$ $\because v_1^* s_1^* = 0$

$x_1^* = 3 > 0 \Rightarrow w_1^* = 0$, $s_1^* = 6 > 0 \Rightarrow v_1^* = 0$

وبذلك تحقق جميع الشروط

$x_j^* w_j^* = 0$

$v_i^* s_i^* = 0$

لو عوضنا قيم x_1, x_2 ، $x_1 = 3, x_2 = 0$ بالمسألة sepp

$$\text{Max } Z(x) = \frac{5x_1 + 3x_2}{3x_1 + 2x_2 + 1}$$

$$\therefore \text{Max } Z = 3/2$$

مسألة2-

$$\text{Max } Z(x) = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + 1}$$

s.to

$$3x_1 + 5x_2 \le 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

باستخدام (4.2.2)، (3.2.2)، (2.2.2) سنحصل على

$$\therefore \text{Min } g_e = 3u_1 + 2u_2$$

s.to

$$-u_2 + 3v_1 + 5v_2 \ge 3$$

$$u_1 + 5v_1 + 2v_2 \ge 2$$

$$-3u_1 - 2u_2 + 15v_1 + 10v_2 \le 0$$

ويحل النموذج بواسطة البرنامج الجاهز QSB نحصل على

$$w^*{}_1 = 0, w_2^* = 12, , u_1^* = 2, u_2^* = 0, v_1^* = 0, v_2^* = 0.6$$

$$\therefore g(u^*, v^*) = \frac{3 \times 2 + 2 \times 0}{2 + 0 + 1}$$

$$= 6/3$$

ان الحل يجب ان يحقق الشروط

$x_j^* w_j^* = 0 \qquad j = 1,2$

$v_i^* s_i^* = 0 \qquad i = 1,2$

$\because x_2^* w_2^* = 0 \qquad \because v_2^* s_2^* = 0$

$w_2^* = 12 > 0 \Rightarrow x_2^* = 0$, $v_2^* = 0.6 > 0 \Rightarrow s_2^* = 0$

لو عدنا لقيود المسألة sepp

$5x_1 + 2x_2 + s_2 = 10 \qquad 3x_1 + 5x_2 + s_1 = 15$

$\therefore x^*_1 = 2$, $\therefore s^*_1 = 9$

$\because x_1^* w_1^* = 0 \qquad \because v_1^* s_1^* = 0$

$x_1^* = 2 > 0 \Rightarrow w_1^* = 0$, $s_1^* = 9 > 0 \Rightarrow v_1^* = 0$

وبذلك تحقق جميع الشروط

$x_j^* w_j^* = 0$

$v_i^* s_i^* = 0$

لو عوضنا قيم x_1, x_2 ، $x_1 = 2, x_2 = 0$ بالمسألة sepp

$$\text{Max } Z(x) = \frac{3x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + 1}$$

$\therefore \text{Max } Z = 6/3$

<u>4- النتائج والتوصيات</u>

<u>1.4- النتائج</u>

1- ان طريقة مكملات المتغيرات المهملة تمتاز بالسهولة وتقوم بأختصار الوقت نسبة الى عدد الجداول الناتجة من الطريقة التكميلية.

2- ان طريقة مكملات المتغيرات المهملة اثبتت كفاءة في حل مسائل البرمجة الكسرية بالوصول الى الحل الامثل الشامل في حين ان الطريقة التكميلية كانت تعطينا احياناً حلاً محلياً خاصة الحالة الاولى من هذه الطريقة

2.4- التوصيات

1- يمكن تطوير صيغة العمل الحالي ليشمل حل مسائل البرمجة الكسرية ذات المقام اصغر من صفر $d' x + \beta < 0$

2- يمكن كتابة برنامج يقوم بتكوين النموذج الرياضي لطريقة مكملات المتغيرات المهملة بدل ايجاده يدوياً

المصادر

[1]- Choo,E.U And Atkins ,D.R., Connecteness in multiple linear fractional programming , Management Science , Vol 29 , Pages 250-255 , 1983.
www.ivsl.org.

[2]- Costa , J.P., An interactive method for multiple objective linear fractional programming problems , springer Doi :10.1007 / s 00291-004-0191 -5, Vol 127 , pages 633-652 , 2005.
www.imdb .com

[3]- Jahan , S., And Islam , M.A., Acomplemntary slackness theorem for linear fractional programming problem ,International Journal of basic & Applied Scienes , Vol : 10 , No :02 ,2010.

[4]- Kornbluth , J.S.H., On the use of multiple objective linear programming a logarithms to solve problems with fractional objectives , European Journal of operational research 23, 78-81 , 1986.

[5]- Tantawy, S.,F., Anew method for solving linear fractional programming problems , Australian Journal of basic and Applied sciences , 1(2) : 105-108 ,2007.

[6] وليد جابر، دراسة وتحليل طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية، رســالة ماجــستير، الجامعة التكنولوجية، (2006).

Abstract:

The aim of this work to give method to solve linear fractional programming using a complementary slackness method and comparing the solution with complementary method to reach the global optimal solution.