تقدير معالم والدالة المعولية لتوزيع الأسي ذو معلمتين بطريقة بيز القياسي

أمل علي غافل
الجامعة المستنصرية/ كلية التربية
قسم الرياضيات

الملخص :

في هذا البحث تم تقدير دالة المعولية لتوزيع الأسي ذو معلمتين بطريقة بيز القياسي وكذلك تقدير معالم هذا التوزيع أي معلمة القياس (θ)ومعلمة الإزاحة (η) أي تم تقدير المعولية التي تبداء من زمن معين وليس من الصفر وعند تعويض عن فضاء معلمة الإزاحة عندما تكون صفر فانها تهمل لان هذا الزمن المعين يمثل مدة الضمان.

1- مقدمة INTRODUCTION

تعد المعولية المؤشر لبيان مدى كفاءة الماكنة ، وقدرتها على العمل من خلال معرفة عدد العطلات التي تحدث على تلك الماكنة خلال فترة زمنية ، وعلية فان معوليه جهاز ما في لحظة t وتحت ظروف معينة بأنها " احتمال بقاء الجهاز يعمل دون أن يصيبه أي خلل أو فشل خلال الفترة الزمنية (0 ,t] [8]

ولعطاء القدرة على تقيم المكائن والمعدات لتخطيط والتطوير مستقبلاً لابد من تقدير المعالم ودالة المعولية لنماذج الفشل ،ويعد التوزيع الآسي ذو معلمتين احد هذه النماذج .

وقد شمل البحث على مقدمة وهدفاً لبحث ومفهوم الدالة المعولية ودالة المخاطرة التجميعية ومعدل نسبة الإخفاق وتوضيح أهم خصائص التوزيع الآسي ذو معلمتين ، وتم استخدام طريقة بيز القياسي في التقدير التي هي إحدى طرق التقدير وتم أيجاد مقدر بيز القياسي لمعلمة القياس ولمعلمة الإزاحة وإيجاد مقدر بيزالقياسي لدالة المعولية ،واختتم البحث بأهم المصادر التي رفدت هذا البحث ٠

2–هدف البحث PURPOSE OF RESEARCH

أن ا لهدف من بحثي هذا هو دراسة التوزيع الآسي بمعلمتين وكذلك تقدير معالم هذا التوزيع أي معلمة (القياسوالازاحة) وتقدير الدالة المعولية له بطريقة بيز القياسي.

3– مفهوم الدالة المعولية Reliability Function Concept

هناك عدة تعار يف لمفهوم دالة المعولية فالمهندسون والأطباء ، ... ، الخ كل منهم أعطى تعريفاً مختلفاً لمعوليه بما يخدم مجال اختصاصهم . لكنهم لم يختلفوا عليه من حيث الجوهر ، والتعاريف الأكثر شمولية لمفهوم دالة المعولية هي:–

احتمال أَنَّ الجهاز يعمل بنجاح لفترة معينة (t , 0) أو أَنَّها احتمال الانجاز لأي جزء من النظام خلال مدة زمنية معينة وتحت ظروف عمل خاصة . ويعبر عن دالة المعولية رياضياً كالآتي [3] :–

$$R(t) = \Pr(T > t) \qquad \dots\ 1$$

$$= \int_t^{\infty} f\ (u)\, du$$

$$= 1 - F\ (t) = \bar{F}(t) \qquad \dots\ 2$$

حيث أن $\bar{F}(t)$: مكملة دالة التوزيع التجميعية
(Complement Of Distribution Function)

4- دالة المخاطرة التجميعية Cumulative Hazard Function

ومن دالة معدل الفشل يمكن الحصول على دالة المخاطرة التجميعية ويرمز لها بالرمز $H(t)$ وهي حاصل جمع قيم معدل الفشل ويعبر عنها بالصيغة الآتية [1]:

$$H(t) = \int_0^{t} h(u)du \qquad \dots 3$$

$$H(t) = -\ln\ R(t) \qquad \dots\ 4$$

حيث أَنَّ $h(u)$: يمثل نسبة الفشل

H(t) : تسمى كذلك بنسبة الاخفاق التتجميعية أو معدل الاخفاق التجميعية .

5–معدل نسبة الاخفاق Failure Rate Average

وهي معدل نسبة الفشل بين (o , t) ويرمز لها بالرمز FRA(t) ويعبر عنها رياضياً كالآتي [1] :–

$$FRA(t) = L(t) = \frac{H\ (t)}{t} = \frac{-\ln\ R(t)}{t} \qquad \ldots\ldots\ 5$$

وإذا كان المعدل L(t) متزايد فيكون $[R(t)]^{1/t}$ لمعوليه متناقص والعكس صحيح عند الزمن (t) .

6 – التوزيع الأسي ذو المعلمتين

Two - Parameter Exponential Distribution

يلعب التوزيع الاسي ذو المعلمتين دوراً مهماً في اختبارات الحياة ، إذ إنَّ دالة الكثافة الاحتمالية له كالآتي [5][6] :–

$$f(t\ ;\theta\ ;\eta) = \frac{1}{\theta} \exp[-(t-\eta)/\theta] \qquad , \quad \eta < t < \infty$$

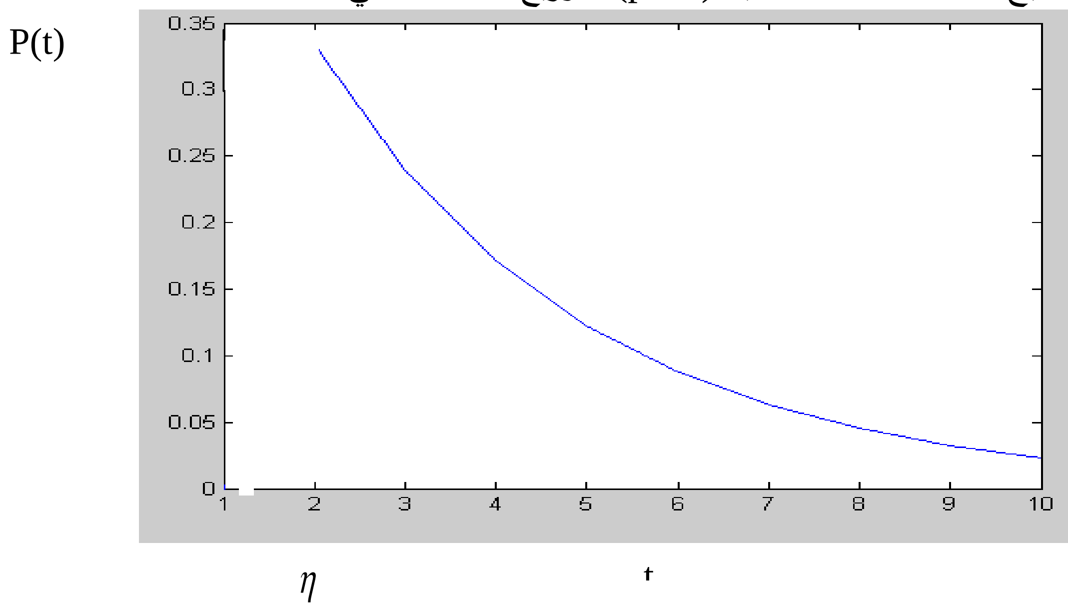
$$\theta > 0$$

إذ إنَّ

η : تمثل معلمة الإزاحة (Shifting Parameter)

θ : تمثل معلمة القياس (Scale Parameter)

ويمكن توضيح دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للتوزيع بالشكل الآتي :–



شكل (1) يوضح دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للتوزيع الأسي ذو معلمتين

وتمت دراسة هذا التوزيع في حالة العطلات والتوقفات التي تحدث في المكائن أو الأجهزة التي تحتاج إلى تمثيل رياضي ، لذلك فان التوزيعات الاحصائية هي نماذج تصف تلك الأوقات ومن ثمَّ يصبح من الممكن دراسة المعولية .

والتوزيع الاسي ذو المعلمتين ممكن تطبيقه على المكائن والمعدات ذات معدل فشل ثابت مع الزمن وكذلك إذا كان وقت الفشل يبدأ من زمن معين (η) وليس من الصفر ، إذ إنَّ (η) تمثل مدة العمر المضمون (Period of guarantied life) وتستخدم هذه المعلمة لوصف مدة الضمان ، المدة التي لأتحدث فيها أعطال ابتدائية .

أما دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الاسي ذو معلمتين θ و η هي

$$F(t\,;\theta,\eta) = \Pr\,(T \le t)$$

$$= \int_{\eta}^{\infty} f(u)\;du$$

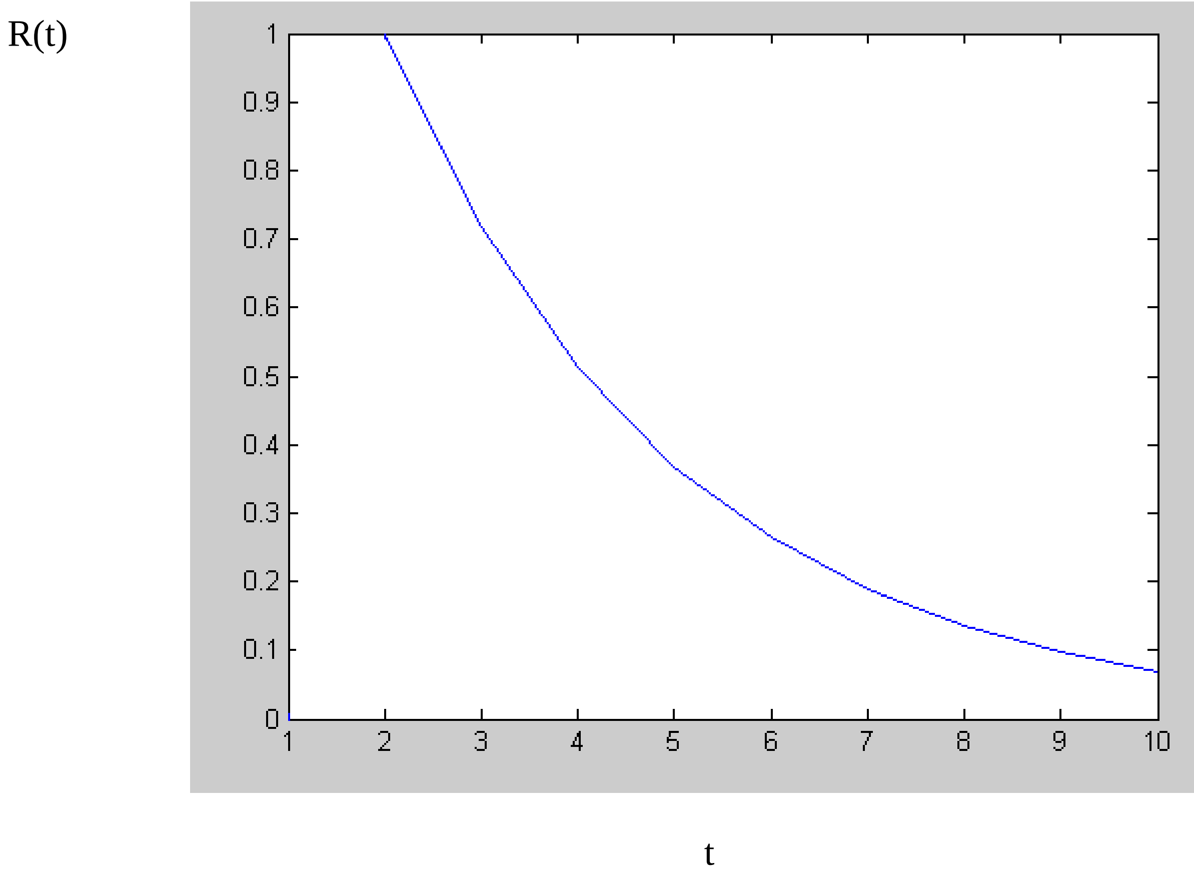
$$= 1 - \exp\,[-(t-\eta)/\theta]$$

وكذلك يمكن أيجاد دالة المعولية لهذا التوزيع كما يأتي [5] [6] :-

$$R(t) = \int_{t}^{\infty} f(u\;;\theta\,,\eta)\;du$$

$$R(t) = \exp\,[-(t-\eta)/\theta] \qquad , \quad \eta < t < \infty \qquad \ldots..\,6$$

ويمكن توضيح دالة المعولية R(t) للتوزيع بالشكل الأتي :



شكل (2) يوضح دالة المعولية $R(t)$ لتوزيع الأسي ذو المعلمتين

7- خصائص التوزيع الاسي ذومعلمتين

(Properties Of two Parameter Exponential Distribution)

يمتلك هذا التوزيع بعض الخصائص منها :-

1- خاصية فقدان الذاكرة (Memory Lessness Property) وتعني أنَّه إذا فرضنا عمر الجهاز يتوزع توزيعاً أسياً فأن العمر المقبل للجهاز $(t+h)$ لا يعتمد على عمره السابق (t) ولتوضيح ذلك يمكن التعبير عنه رياضياً كالآتي :

$$\Pr(T>t+h \mid T>t)=\Pr(T>h)$$

$$\Pr(T>t+h \mid T>t)=\frac{\Pr(T>t+h)}{\Pr(T>t)}$$

$$=\frac{\int_{t+h}^{\infty}\frac{1}{\theta}\exp[-(u-\eta)/\theta]\,du}{\int_{t}^{\infty}\frac{1}{\theta}\exp[-(u-\eta)/\theta]\,du}$$

$$= \frac{-[_{t+h}^{\infty} \ \exp[-(u-\eta)/\theta]}{-[_{t}^{\infty} \ \exp[-(u-\eta)/\theta]}$$

$$= \frac{\exp\ [-((t+h)-\eta)/\theta]}{\exp[-(t-\eta)/\theta]}$$

$$= \frac{\exp\ [-(t+h)/\theta]\ .\ \exp\ \eta/\theta}{\exp\ \ (-t/\theta)\ \ .\ \exp\ \eta/\theta}$$

$$= \exp\ -\ h/\theta$$

2- خاصية أعادة الذات (النفس) Self – Reproducing Property

إذا رتبت أعمار الماكنة أو أوقات الفشل ($t_{(1)}$, … , $t_{(n)}$) بصورة تصاعدية فأن أصغر عمر لـ (t) يتوزع توزيعاً أسياً ولكن بمعلمة جديدة أي يعيد نفسه .

$$F(t) = \Pr[T_{(1)} \le t\ ]$$

$$= 1 - \Pr[T_{(1)} > t]$$

$$\Pr[T_{(1)} > t] = \Pr[T_{(1)} > t, T_{(2)} > t, ..., T_{(n)} > t]$$

$$= [R(t)]^n$$

$$F_{T(1)}\ (t) = 1 - [R(t)]^n$$

$$= 1 - \exp\ [-(t-\eta)/\theta]^n$$

$$= 1 - \exp[-n(t-\eta)/\theta]$$

$$f_{T(1)}\ (t) = \frac{n}{\theta}\exp[-n(t-\eta)/\theta]$$

$$t_{(1)} \sim Exp\ with\ Two\ Parameters\ (\frac{n}{\theta}, \eta)$$

$\therefore$ $T_{(1)}$ يمتلك توزيع أسي بمتوسط $\frac{\theta}{n} + \eta$

أما التباين لـ $T_{(1)}$

$$Var(t_{(1)}) = \frac{\theta^2}{n^2}$$

والجدول الأتي يوضح بعض خصائص التوزيع الاسي ذو معلمتين الذي يمتلك دالة الكثافة الاحتمالية[2] [5] :-

$$f(t;\theta,\eta) = \frac{1}{\theta}\ \exp[-(t-\eta)/\theta] \quad , \quad \eta < t < \infty$$

$$\theta > 0$$

Properties	Formula
Mean	$E(t)=\theta+\eta$
Median	$Me(t)=\eta+\theta\ \log 2$
Variance	$Var(t)=\ \theta^2$
Third Moment	$M_3\ =2$
Forth Moment	$M_4\ =\ 9$

جدول (1)

بعض خصائص التوزيع الاسي ذو معلمتين

أما دالة الكثافة الاحتمالية للاحصاءة المرتبة i في حالة حجم العينة n هي كالآتي [2][5]:-

$$f(t_{i:n}\ ;\theta,\eta)=\frac{n\,!}{(i-1)\,!\,(n-i)\,!}\ f(t)\ [F(t)]^{i-1}\ \ [1-F(t)]^{n-i}$$

8- طريقة بيز القياسي في التقدير(Estimation By Standard Bayes)

تعد طريقة بيز القياسي (Standard Bayes Method) أسلوب من أساليب الطرائق البيزية التي اقتُرحت من قبل (Thomas Bayes) (1702)[9] ، لذلك أقترن أسم الطريقة باسم مُقترِحها .

يعتمد رأي المدرسة البيزية على افتراض المعلمات المراد تقديرها ماهي ألا متغيرات عشوائية يتطلب الحصول على معلومات مسبقة عنها ، وذلك بالاعتماد على التجارب السابقة حول الظاهرة المدروسة ، وبالتالي صياغة هذه المعلومات المسبقة بشكل توزيع احتمالي سابق (prior Distribution) ، ويعاب على هذه المدرسة صعوبة تحديد التوزيع السابق بشكل دقيق لعدم دقة المعلومات أو لصعوبة الحصول عليها .

في حالة عدم وجود معلومات مسبقة ومتاحة عن المعلمة المطلوبة تقديرها يفضل أتباع الأسلوب الذي اقترحه الباحث (Jeffry)، علما بان دالة الكثافة الاحتمالية الأولية التي يتم الحصول عليها بهذا الأسلوب غالبا ما تكون غير ملائمة (Improper)، وذلك لان تكامل الدالة في مجالها لا يساوي الواحد الصحيح، ولكن في حالة دمجها بدالة الإمكان نحصل على دالة كثافة احتمالية لاحقة لتقدير المعلمة المجهولة.

حسب أسلوب الباحث (Jeffry) فأن الدالة الاحتمالية الأولية غير المعلوماتية لكل من المعلمتين العشوائيتين θ و η يمكن افتراضها بحسب الصيغة الاتية:

$$J(\theta,\eta)\alpha\frac{1}{\theta^{\rho}}$$

حيث أن ∞ , $0<\eta<$ $0<\theta$ $\rho=1,2,3....$

$J(\theta,\eta)$ تمثل دالة كثافة الاحتمالية الأولية المشتركة

لتكن $t_1,t_2,.....t_n$ عينة عشوائية بحجم n من التوزيع الاسي ذو معلمتين فان دالة الامكان تكون بشكل الأتي :

$$L(t_1,t_2,...,t_n/\theta,\eta)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i/\theta,\eta)$$

$$=\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta}}$$

وباستخدام صيغة بيز العكسية فان توزيع اللاحق(Posterior Distribution) المشترك للمعلمتين θ , η يكون كالأتي:

إذ أن C هو ثابت التناسب الموجب

وان C هو مقلوب دالة كثافة الحدية $f(t_1,t_2,...,t_n)$

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega}L(t_1,t_2,...,t_n/\theta,\eta)J(\theta,\eta)d\theta d\eta=f(t_1,t_2,...,t_n)$$

$$h(\theta,\eta/t_1,t_2,..,t_n)\alpha\frac{1}{\theta^{\rho}}L(t_1,t_2,...,t_n/\theta,\eta)$$

$$h(\theta,\eta/t_1,t_2,...,t_n)\alpha\frac{1}{\theta^{\rho}}\left(\frac{1}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta}}\right)$$

$$h(\theta,\eta/t_1,t_2,..,t_n)=C\frac{1}{\theta^{n+\rho}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta}}$$

$$C^{-1}=\int_0^{t_1}\int_0^{\infty}\frac{1}{\theta^{n+\rho}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta}}\,d\theta d\eta$$

$$let u=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta},\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{u}\Rightarrow d\theta=\frac{-\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{u^2}du$$

$$C^{-1}=\int_0^{t_1}\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{\frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta))^{n+\rho}}{u^{n+\rho}}}e^{-u}\,\frac{-\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{u^2}du\right)d\eta$$

$$C^{-1}=\int_0^{t_1}\left[\int_0^{\infty}\frac{-u^{n+\rho-2}}{\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)\right)^{n+\rho-1}}e^{-u}du\right]d\eta$$

$$C^{-1}=\int_0^{t_1}\frac{-1}{\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)\right)^{n+\rho-1}}\left[\int_0^{\infty}u^{n+\rho-2}e^{-u}du\right]d\eta$$

$$=\Gamma(n+\rho-1)\int_0^{t_1}-(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta))^{1-n-\rho}\,d\eta$$

$$=\frac{\Gamma(n+\rho-1)}{n}\int_0^{t_1}-(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta))^{1-n-\rho}\,nd\eta$$

$$C^{-1}=\frac{\Gamma(n+\rho-1)}{n(n+\rho-2)(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}$$

$$C^{-1}=\frac{(n+\rho-2)(n+\rho-3)!}{n(n+\rho-2)(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}$$

$$C^{-1}=\frac{\Gamma(n+\rho-2)}{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}$$

أذن دالـة التوزيـع اللاحـق المشـتركة تكون بشكل التالي:

$$h(\theta,\eta/t_1,t_2,....,t_n)=\frac{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\left[\frac{1}{\theta^{n+\rho}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta}}\right] \quad ....7$$

$\theta>0$

$0<\eta<t_1<t<\infty$

t_1 تمثل اصغر قيمة لمتغير العشوائي t

<u>لإيجاد دالة توزيع اللاحق الحدية بالنسبة لمعلمةθ</u>

$$h_1(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=\int_0^{t_1}h(\theta,\eta/t_1,t_2,...,t_{n)}d\eta \quad .....8$$

لإيجاد هذه الدالة نعوض معادلة(7) في معادلة (8) نحصل على:

$$h_1(\theta/t_1,t_2,...,t_n)=\int_0^{t_1}\frac{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\left[\frac{1}{\theta^{n+\rho}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta}}\right]d\eta$$

$$=\frac{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\int_0^{t_1}\frac{1}{\theta^{n+\rho}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta}}d\eta$$

$$=\frac{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\left(\frac{1}{\theta^{n+\rho}}\times\frac{\theta}{n}\int_0^{t_1}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)}{\theta}}\frac{n}{\theta}d\eta\right)$$

$$h_1(\theta/t_1,t_2...,t_{n)}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\left(\frac{1}{\theta^{n+\rho-1}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1)}{\theta}}\right) \quad ....9$$

أما لإيجاد دالة التوزيع اللاحق الحدية بالنسبة لمعلمة η يكون كالأتي:

$$h_2(\eta/t_1,t_2,.....,t_n)=\int_0^\infty h(\theta,\eta/t_1,t_2,...,t_n)d\theta \qquad ......10$$

وعند تعويض معادلة (7) في معادلة(10) يكون كالاتي:

$$h_2(\eta/t_1,t_2,....,t_n)=\int_0^\infty \frac{n(\sum_{i=1}^n(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\left[\frac{1}{\theta^{n+\rho}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^n(t_i-\eta)}{\theta}}\right]d\theta$$

$$h_2(\eta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{n(\sum_{i=1}^n(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+\rho}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^n(t_i-\eta)}{\theta}}d\theta$$

$$let u=\frac{\sum_{i=1}^n(t_i-\eta)}{\theta}\Rightarrow\theta=\frac{\sum_{i=1}^n(t_i-\eta)}{u}\Rightarrow d\theta=\frac{\sum_{i=1}^n(t_i-\eta)}{u^2}du$$

$$h_2(\eta/t_1,t_2,...,t_n)=\frac{n(\sum_{i=1}^n(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\int_0^\infty \frac{u^{n+\rho}}{(\sum_{i=1}^n(t_i-\eta))^{n+\rho}}e^{-u}\frac{(\sum_{i=1}^n(t_i-\eta))}{u^2}du$$

$$=\frac{n(\sum_{i=1}^n(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\left(\frac{1}{(\sum_{i=1}^n(t_i-\eta))^{n+\rho-1}}\right)\int_0^\infty u^{n+\rho-2}e^{-u}du$$

$$=\frac{n(\sum_{i=1}^n(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2}\left(\frac{\Gamma(n+\rho-1)}{(\sum_{i=1}^n(t_i-\eta))^{n+\rho-1}}\right)$$

$$h_2(\eta/t_1,t_2,.....,t_n)=\frac{n(\sum_{i=1}^n(t_i-t_1))^{n+\rho-2}(n+\rho-2)(n+\rho-3)!}{(n+\rho-3)!(\sum_{i=1}^n(t_i-\eta))^{n+\rho-1}}$$

$$h_2(\eta / t_1, t_2, ..., t_n) = \frac{n(n+\rho-2)(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{n+\rho-2}}{(\sum_{i=1}^{n}(t_i - \eta))^{n+\rho-1}} \quad ....11$$

$0 < \eta < t_1$

§1 *مقدر بيز القياسي لمعلمة القياس(θ)* (Standard Bayes Estimator F0r Scale Parameter)

لغرض الحصول على مقدربيز لهذه المعلمة لابد من توفر دالة الخسارة Loos Function) والتي يعد توفرها اساسياً في أسلوب بيزلتقدير، وهناك أنواع من دوال الخسارة منها دالة الخسارة التربيعية(Squared loss Function) وتكون بالصيغة التالية:

15

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \begin{cases} (\hat{\theta} - \theta)^2, \hat{\theta} \neq \theta \\ 0, \hat{\theta} = \theta \end{cases}$$

وان التوقع الرياضي لهذه الدالة يسمى ايضاً دالة مخاطرة(Rsik Function)

$$E\left\{L(\hat{\theta}, \theta)\right\} = \int_{\forall\theta} L(\hat{\theta}, \theta) h_1(\theta / t_1, t_2 ..., t_n) d\theta$$

ويكون مقدر بيز ($\hat{\theta}_\beta$) للمعلمة θ هو تلك القيمة المتوقعة لهذه المعلمة التي تجعل دالة المخاطرة في نهايتها الصغرى[4] ويمكن برهنة أن ($\hat{\theta}_\beta$) هو التوقع اللاحق (Posterior Mean) للمعلمة θكما يلي:

$$E\left\{L(\hat{\theta}, \theta)\right\} = \int_{\forall\theta} (\hat{\theta} - \theta)^2 h_1(t_1, t_2, ..., t_n) d\theta$$

$$= \int_{\forall\theta} (\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \theta^2) h_1(\theta / t_1, t_2, ..., t_n) d\theta$$

$$= \hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta} E(\theta / t_1, ..., t_n) + E(\theta^2 / t_1, ..., t_n)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} E\left\{L(\hat{\theta}, \theta)\right\} = 2\hat{\theta} - 2E(\theta / t_1, ..., t_n)$$

$$2\hat{\theta} - 2E(\theta / t_1, ..., t_n) = 0$$

$$\hat{\theta} = E(\theta / t_1, ..., t_n)$$

أما المشتقة الجزئية الثانية لدالة المخاطرة هي

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} E\left\{ L(\hat{\theta}, \theta) \right\} = 2$$

بما أن المشتقة الجزئية الثانية موجبة فان النقطة الحرجة نهاية صغرى ،حيث أن مقدر بيز القياسي للمعلمة θهو ذلك المقدر الذي يجعل دالة المخاطرة في نهايتها الصغرى أي مقدربيز القياسي لمعلمة القياس يكون بشكل التالي:

$$\hat{\theta}_\beta = E(\theta / t_1, ..., t_n)$$

$$\hat{\theta}_\beta = \int_0^\infty \theta h_1(\theta / t_1, t_2 ..., t_n) d\theta \quad ....12$$

عند تعويض معادلة(9) في معادلة (12) نجد أن:

$$\hat{\theta}_\beta = \int_0^\infty \theta \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)\theta^{n+\rho-1}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\theta}} d\theta$$

$$\hat{\theta}_\beta = \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+\rho-2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\theta}} d\theta$$

$$let u = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{u} \Rightarrow d\theta = \frac{-\sum_{i=1}^n (t_i - t_1)}{u^2} du$$

$$\hat{\theta}_\beta = \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)} \int_0^\infty \frac{u^{n+\rho-2}}{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+\rho-2}} e^{-u} \frac{-(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))}{u^2} du$$

$$\hat{\theta}_\beta = \frac{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)} \left(\frac{-1}{(\sum_{i=1}^n (t_i - t_1))^{n+\rho-3}} \right) \int_0^\infty u^{n+\rho-4} e^{-u} du$$

$$\hat{\theta}_{\beta}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\left(\frac{-1}{(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-3}}\right)\Gamma(n+\rho-3)$$

$$\hat{\theta}_{\beta}=\frac{(n+\rho-4)!}{(n+\rho-3)!}\left(\frac{-1}{(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{-1}}\right)$$

$$\hat{\theta}_{\beta}=\frac{-(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))}{n+\rho-3}$$

أذن مقدر بيز القياسي لمعلمة القياس يكون بشكل التالي:

$$\hat{\theta}_{\beta}=\frac{n(t_1-\bar{t})}{n+\rho-3}$$

وعندما$(\rho=2)$

$$\hat{\theta}_{\beta}=\frac{n(t_1-\bar{t})}{(n-1)}$$

2 § مقدر بيز القياسي لمعلمة الإزاحة (η)

(Standard Bayes Estimator For Shifting Parameter)

يمكن أيجاد مقدر بيز القياسي لمعلمة الإزاحة باستخدام دالة الخسارة التربيعية،وعلية فان مقدر بيز القياسي للمعلمة η ما هو ألا الوسط الحسابي المشروط (Conditional mean)

$$\hat{\eta}_{\beta}=E[\eta/t_1,....,t_n] \quad ...13$$

$$\hat{\eta}_{\beta}=\int_0^{t_1}\eta h_2(\eta/t_1,t_2,....,t_n)d\eta$$

وعند تعويض عن قيمة h_2 في معادلة(13) نحصل على

$$=\int_0^{t_1}\eta\left(\frac{(n+\rho-2)n(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta))^{n+\rho-1}}\right)d\eta$$

$$=(n+\rho-2)n(\sum_{0}^{t_1}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}\int_0^{t_1}\eta(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta))^{-(n+p-1)}d\eta$$

$$dv = (\sum_{i=1}^{n}(t_i - \eta))^{-(n+\rho-1)} d\eta \qquad let\, u = \eta$$

$$v = \frac{1}{n(n+\rho-2)}(\sum_{i=1}^{n}(t_i - \eta))^{2-n-\rho} \qquad du = d\eta$$

$$\int_0^{\infty} \eta(\sum_{i=1}^{n}(t_i - \eta))^{-(n+\rho-1)} d\eta = \int_0^{t_1} u dv = uv\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} v du$$

$$= t_1\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{2-n-\rho}}{n(n+\rho-2)}\right) - \int_0^{t_1} \frac{1}{n(n+\rho-2)}(\sum_{i=1}^{n}(t_i - \eta))^{2-n-\rho} d\eta$$

$$= \frac{t_1(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{2-n-\rho}}{n(n+\rho-2)} - \frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{3-n-\rho}}{n^2(n+\rho-2)(n+\rho-3)}$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{2-n-\rho}}{n(n+\rho-2)}\left[t_1 - \frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))}{n(n+\rho-3)}\right]$$

أذن مقدر بيز القياسي لمعلمة الإزاحة هو

$$\hat{\eta}_{\beta} = (n+\rho-2)n(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{n+\rho-2}\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{2-n-\rho}}{n(n+\rho-2)}\left[t_1 - \frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))}{n(n+\rho-3)}\right]\right)$$

$$\hat{\eta}_{\beta} = t_1 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} t_i - n t_1)}{n(n+\rho-3)}$$

$$\hat{\eta}_{\beta} = \frac{n(n+\rho-3)t_1 - \sum_{i=1}^{n} t_i - n t_1}{n(n+\rho-3)}$$

وعندما($\rho = 2$)

$$\hat{\eta}_\beta = \frac{n^2 t_1 - nt_1 - n\bar{t} + nt_1}{n(n-1)}$$

$$\hat{\eta}_\beta = \frac{nt_1 - \bar{t}}{(n-1)}$$

§3مقدر بيز القياسي لدالة المعولية

Standard Bayes Estimator for Reliabity function

أن مقدر بيز القياسي لدالة المعولية R(t) وباستخدام دالة الخسارة التربيعية (squarad lass function) ماهو الا الوسط الحسابي المشروط

$$\hat{R}_\beta(t) = E[R(t)/t_1,....,t_n] \quad ....14$$

$$\hat{R}_\beta(t) = \int_0^{t_1}\int_0^{\infty} R(t)h(\theta,\eta/t_1,t_2,...,t_n)d\theta d\eta$$

بما أن الدالة المعولية للتوزيع الاسي ذو معلمتين هو:

$$R(t) = e^{-\frac{(t-\eta)}{\theta}}$$

وبالتعويض الدالة المعولية ومعادلة (7)في معادلة(14) نحصل على :

$$\hat{R}_\beta(t) = \int_0^{t_1}\int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-\eta)}{\theta}} \frac{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)} \left[\frac{1}{\theta^{n+\rho}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(t-\eta)}{\theta}}\right] d\theta d\eta$$

$$= \int_0^{t_1} \frac{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^{n+\rho}} e^{-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)+(t-\eta)\right)}{\theta}} d\theta\right] d\eta$$

$$Let u = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)+(t-\eta)}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)+(t-\eta)}{u} \Rightarrow d\theta = \frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)+(t-\eta)\right)}{u^2}$$

$$= \int_0^{t_1} \frac{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)} \left[\int_0^{\infty} \frac{u^{n+\rho}}{\left((\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta))+(t-\eta)\right)^{n+\rho}} e^{-u} \left(\frac{-\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta)+(t-\eta)\right)}{u^2}\right) du\right] d\eta$$

21

$$\hat{R}_{\beta}(t)=\int_{0}^{t_1}\frac{n(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\left(\frac{-1}{\left((\sum_{i=1}^{n}(t_i-\eta))+(t-\eta)\right)^{n+\rho-1}}\right)\left[\int_{0}^{\infty}u^{n+\rho-2}e^{-u}du\right]d\eta$$

$$\hat{R}_{\beta}(t)=\frac{n\Gamma(n+\rho-1)(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\int_{0}^{t_1}-\left((\sum_{i=1}^{n}t_i+t)-(n+1)\eta\right)^{-(n+\rho-1)}d\eta$$

$$\hat{R}_{\beta}(t)=\frac{n\Gamma(n+\rho-1)(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\Gamma(n+\rho-2)}\int_{0}^{t_1}-\left((\sum_{i=1}^{n}t_i+t)-(n+1)\eta\right)^{-(n+\rho-1)}(n+1)d\eta$$

$$\hat{R}_{\beta}(t)=\frac{n(n+\rho-2)(n+\rho-3)!(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{n+1(n+\rho-3)!}\left(\frac{-1}{n+1}\frac{\left((\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))+(t-t_1)\right)^{-(n+\rho-2)}}{-(n+\rho-2)}\right)$$

$$\hat{R}_{\beta}(t)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))^{n+\rho-2}}{\left((\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))+(t-t_1)\right)^{n+\rho-2}}\right)$$

$$\hat{R}_{\beta}(t)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{(\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))}{\left((\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_1))+(t-t_1)\right)}\right)^{n+\rho-2}$$

$$\hat{R}_{\beta}(t)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{(t-t_1)}{n(\bar{t}-t_1)}\right)}\right)^{n+\rho-2}$$

أذن مقدر بيز القياسي للدالة المعولية هو:

$$\hat{R}_{\beta}(t)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{(t-t_1)}{n(\bar{t}-t_1)}\right)^{n+\rho-2}}\right)$$

REFERENCES المصادر

1-عبودي،عماد حازم (2005)" محاضرات في النظرية المعولية وتطبيقاتها" لمرحلة الماجستير بحوث عمليات.

2-Afify , E.E, (2006) ," Note On The Exponential Distribution" . Faculty of Engineering Menowfiya University , Shibeen . EL. Koom

3-Al-nasserAbdul majeed hamza (2009)"An Introduction to Statistical Reliability"Ithraa Publishing and Distribution

4-Askoy, S, (2005) "Bayesian Decision Theory", Bilkent University, Department of Computer Engineering.

5- Basu , A.P, (1995) , "The Exponential Distribution Theory" , Methods and Applications , Gordon and Breach Publishers .

6- Johnson , N.L. & Katz , S. (1970) , "Continuous Univariate Distribution –1" John Wiley & Sons .

7-Sinha,S.K.,(1986)"Life testing and Reliability Estimation"Wiley Eastern Limited.

8-Wahayeb , B.R. , (1978) " Some Models For Accelerated Life Testing " , M.Sc. Thesis , University Of Baghdad

9- Zellner , A. , (1971) " An Introduction To Bayesian Inference In Econometrics " , John Willy And Sons , Inc. .

Abstract

In this search reliability function of two parameter exponential distribution is estimated by using Standard Bayes method. Also parameters of distribution is estimated, that is the scale parameter(ɵ) and shifting parameter(ŋ) .The reliability is estimated in particular time and not on zero, the shifting parameter space on zero will be neglected when it is substituted because this specific time represents the Guarantee period.